ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 17 | Oktober 1937 | Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen.

Von *Rudolf Iglisch* in Braunschweig.

In neuerer Zeit hat die Theorie nichtlinearer Schwingungen immer mehr an Bedeutung gewonnen. Es scheint mir daher angebracht, den Begriff der Resonanz, der für die Theorie der linearen Schwingungen von so großer Bedeutung ist, in möglichst einfacher mathematisch strenger Weise auch für die Theorie der nichtlinearen Schwingungen zu entwickeln, seine dortige Bedeutung und die Analogie mit dem entsprechenden Begriff bei linearen Schwingungen klar hervortreten zu lassen. Natürlich ist dieser Begriff schon in früheren Untersuchungen über nichtlineare Schwingungen zutage getreten[1]), aber bisher stets nur entweder unter Verwendung von Näherungsansätzen oder als ein fast nebensächlich anmutendes Resultat einer ziemlich schwierigen mathematischen Untersuchung, so daß seine praktische Bedeutung durch den mathematischen Formalismus überwuchert wurde. Tatsächlich läßt sich die Stellung des Resonanzbegriffes in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen in äußerst einfacher Weise einsehen unter alleiniger Benutzung von bekannten Schlußweisen aus der Theorie Sturm-Liouvillescher Randwertprobleme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Um den engen Zusammenhang mit dem Resonanzbegriff bei linearen Schwingungen deutlicher hervortreten zu lassen, wird in § 1 die Behandlung der linearen Schwingungen nach der gleichen Methode noch einmal vorangestellt.

Das wesentliche Resultat der Arbeit wird das folgende sein: Obwohl die Theorie der linearen Schwingungen kein echter Grenzfall der Theorie nichtlinearer Schwingungen ist — d. h. läßt man den Einfluß der nichtlinearen Glieder stetig nach Null gehen, so erhält man in der Grenze (und zwar gerade im Falle der Resonanz!) im allgemeinen nicht die Resultate, die die linearisierte Theorie liefert; wir haben also den linearen Fall einen Ausartungsfall zu nennen, nicht einen Grenzfall —, sind doch beiden Fällen gerade diejenigen typischen Erscheinungen gemeinsam, durch die der lineare Resonanzbegriff in der Technik so große Bedeutung gewonnen hat; wir werden zunächst in § 1 noch einmal diese in Rede stehenden Eigenschaften im Falle linearer Schwingungen herleiten, um daran die entsprechenden Untersuchungen bei nichtlinearen Schwingungen anzuschließen. Am Ende der Paragraphen 1 und 2 sind die einander entsprechenden Hauptsätze durch Sperrdruck hervorgehoben.

---

[1]) Vgl. z. B. Rudolf Iglisch: Zur Theorie der Schwingungen (3. Mitteilung), Monatsh. f. Math. u. Phys. 42 (1935), S. 7 bis 36, insbesondere S. 33. — Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem, Math. Ann. 112 (1936), S. 221 bis 246, insbesondere S. 221 bis 222. — N. Kryloff et N. Bogoliùboff: Méthodes approchées de la mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant. Acad. des sciences d'Ukraine,. No. 14, Kiew 1935.

§ 1. Der lineare Resonanzfall. Wir suchen die mit der Periode P periodischen Lösungen $x(t)$ der linearen Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + a^2 x(t) = g(t), \qquad x(t+P) = x(t) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wo $g(t)$ selbst die (nicht notwendig kleinste) Periode P besitzt:

$$g(t+P) = g(t) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Gl. (1) ist die Form der Schwingungsgleichung für einen Massenpunkt, der um eine stabile Gleichgewichtslage $x = 0$ Schwingungen von einem Freiheitsgrad ausführt unter Einwirkung einer äußeren Zwangskraft $g(t)$ und einer elastischen Kraft, deren Größe proportional der Lagekoordinate x ist.

Seien $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ein Fundamentalsystem der zu (1) gehörenden homogenen Gleichung

$$\ddot{\varphi} + a^2 \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

(d. h. zwei linear unabhängige Lösungen) und $y(t)$ eine partikuläre Lösung von (1), dann ist

$$x(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + y(t) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die sog. allgemeine Lösung von (1), d. h. jede Lösung von (1) läßt sich durch passende Wahl der willkürlichen Integrationskonstanten C_1 und C_2 in der Form (4) schreiben.

Wir haben jetzt C_1 und C_2 so zu bestimmen, daß in (4) $x(t)$ die Periode P besitzt; das liefert die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_1[\varphi_1(t+P) - \varphi_1(t)] + C_2[\varphi_2(t+P) - \varphi_2(t)] &= y(t) - y(t+P) \\ C_1[\dot{\varphi}_1(t+P) - \dot{\varphi}_1(t)] + C_2[\dot{\varphi}_2(t+P) - \dot{\varphi}_2(t)] &= \dot{y}(t) - \dot{y}(t+P) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5).$$

Sind diese für irgendeinen Wert t erfüllt, so ist umgekehrt auch $x(t)$ periodisch mit der Periode P, da wegen der gleichen Periodizitätseigenschaft von $g(t)$ nach Ablauf einer Zeitspanne P die Differentialgleichung (1) ungeändert geblieben ist und $x(t)$ wieder gleichen Anfangswert und Anfangstangente besitzt. Unser Problem ist also gleichwertig mit der Lösung der Differentialgleichung (1) unter den Randwerten $x(t) = x(t+P)$, $\dot{x}(t) = \dot{x}(t+P)$ bei irgendeinem Wert von t, z. B. $t = 0$.

Die an (5) angeschlossene Bemerkung liefert die für das in Rede stehende Randwertproblem der linearen Gl. (1) typische Alternative: Entweder besitzt unser inhomogenes Randwertproblem (1) eine und nur eine Lösung — nämlich, wenn die Koeffizientendeterminante in (5) von Null verschieden ist —, und das homogene Randwertproblem (3) besitzt nur die triviale Lösung $\varphi(t) \equiv 0$; oder das homogene Randwertproblem (3) besitzt eine Lösung $\varphi(t) \not\equiv 0$ — d. h. die Koeffizientendeterminante von (5) verschwindet —, dann besitzt das inhomogene Problem (1) im allgemeinen keine Lösung. Letzteres sieht man am leichtesten, indem man rechts in (5) ein $y(t)$ einsetzt, für das (5) nicht lösbar ist, und dann $g(t) = \ddot{y} + a^2 y$ setzt.

Den zweiten Fall bezeichnet man in der Schwingungslehre als Resonanzfall. Da zwei linear unabhängige Lösungen von (3) $\cos a t$ und $\sin a t$ sind, die beide die Periode $\frac{2\pi}{a}$ besitzen, tritt er also für die Periode P der erzwingenden Kraft ein, falls

$$a = \frac{2\pi m}{P} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

mit ganzzahligem m ist. Man nennt a die Eigenfrequenz des schwingenden Systems, demnach wäre $\frac{2\pi}{a}$ die zugehörige Eigenperiode.

Um diesen Resonanzfall genauer zu untersuchen, kann man sich zunächst fragen, unter welchen Bedingungen das inhomogene Problem (1) doch eine mit P periodische Lösung besitzt. Sei zunächst $x(t)$ eine solche Lösung. Man bilde die sog. Lagrangesche Identität zwischen den Gl. (1) und (3), d. h. man multipliziere (1) mit $\varphi(t)$, (3) mit $x(t)$ und subtrahiere die entstehenden Gleichungen; diese Lagrangesche Identität integriere man von t bis $t+P$. Dann erscheint

$$(\dot{x}(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)x(t))\Big|_t^{t+P} = \int_t^{t+P} g(t)\varphi(t)\,dt \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Da wegen der Periodizitätseigenschaften von $x(t)$ und $\varphi(t)$ die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, finden wir also als notwendige Bedingung für die Existenz einer mit P periodischen Lösung von (1):

$$\int_t^{t+P} g(t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0, \qquad \int_t^{t+P} g(t)\,\varphi_2(t)\,dt = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8);$$

denn dann und nur dann ist die rechte Seite von (7) für jede Lösung $\varphi(t)$ von (3) gleich Null. — Die Bedingung (8) ist aber auch hinreichend für die Existenz einer periodischen Lösung von (1), ja, es folgt sogar sofort, daß dann jede Lösung $x(t)$ von (1) mit P periodisch sein muß. Sei etwa im Gegenteil $x(t)$ eine nicht mit P periodische Lösung von (1). Dann kann man wieder die Gl. (7) bilden, in der jetzt voraussetzungsgemäß die rechte Seite verschwindet. Daher hat man, wenn man (7) zweimal anschreibt, einmal für $\varphi(t)=\varphi_1(t)$, dann für $\varphi(t)=\varphi_2(t)$:

$$\varphi_1(t)\,[\dot{x}(t+P) - \dot{x}(t)] + \dot{\varphi}_1(t)\,[x(t) - x(t+P)] = 0\,,$$

$$\varphi_2(t)\,[\dot{x}(t+P) - \dot{x}(t)] + \dot{\varphi}_2(t)\,[x(t) - x(t+P)] = 0\,.$$

Da wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dot{\varphi}_1(t) \\ \varphi_2(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

ist für alle t — setzt man $\varphi_1(t) = \cos a\,t$, $\varphi_2(t) = \sin a\,t$, so hat die Determinante den Wert a —, folgt

$$x(t) = x(t+P)\,, \qquad \dot{x}(t) = \dot{x}(t+P)$$

und damit wie früher aus der Differentialgleichung (1) die Periodizität von $x(t)$ mit der Periode P.

Was tritt nun ein für Zwangskräfte $g(t)$, die der Bedingung (8) nicht genügen? Am einfachsten erhält man darauf die Antwort, wenn man $g(t)$ zerspaltet in

$$g(t) = g_1(t) + A_1 \cos a\,t + B_1 \sin a\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

wo die Konstanten A_1 und B_1 die Werte

$$A_1 = \frac{2}{P}\int_t^{t+P} g(t) \cos a\,t\,dt\,, \qquad B_1 = \frac{2}{P}\int_t^{t+P} g(t) \sin a\,t\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

besitzen. Dann besteht nämlich für $g_1(t)$ (8) zu Recht, und man erhält als allgemeine Lösung von (1)

$$x(t) = y_1(t) + y(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

wo $y_1(t)$ die allgemeine mit P periodische Lösung von

$$\ddot{y}_1 + a^2 y_1 = g_1(t)$$

ist und $y(t)$ eine Partikularlösung von

$$\ddot{y} + a^2 y = A_1 \cos a\,t + B_1 \sin a\,t\,,$$

also z. B.

$$y(t) = \frac{1}{2a}\,t\,[A_1 \sin a\,t - B_1 \cos a\,t] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Da bei Nichterfülltsein von (8) nicht A_1 und B_1 beide verschwinden können, wächst somit linear mit der Zeit jede Lösung von (1) über alle Grenzen für jede mit P periodische erzwingende Kraft $g(t)$, die nicht den Bedingungen (8) genügt. Das ist die wesentliche Erscheinung beim linearen Resonanzfall.

Wir fassen diese Resultate in folgenden Sätzen zusammen: 1. Im Nichtresonanzfall kann unter Einwirkung der mit P periodischen Kraft $g(t)$ genau eine mit P periodische Bewegung $x(t)$ bestehen. 2. Im Resonanzfall können mit der Kraft $g(t)$ dann und nur dann mit P periodische Bewegungen verträglich sein, wenn die Bedingungen (8) erfüllt sind; in diesem Fall ist sogar jede überhaupt mögliche Bewegung mit P periodisch. 3. Ist (8) nicht erfüllt, so wächst für jede Bewegung die Schwingungsamplitude linear mit der Zeit über alle Grenzen.

Wir wollen noch folgende Bemerkung anknüpfen: Eine mit P periodische Lösung $x(t)$ von (1) ist eine Resonanzlösung, wenn die homogene Gl. (3) eine mit P periodische Lösung besitzt. Denn dann kann man immer eine mit P periodische zusätzliche Zwingfunktion $\beta\,G(t)$

(sogar mit beliebig kleinem β) so wählen, daß lineares Anwachsen der Schwingungsamplitude mit der Zeit eintritt. Man hat ja nur die Gleichung

$$\ddot{z} + a^2 z = g(t) + \beta\, G(t)$$

zu untersuchen, oder mit $z = x + u$ die Gleichung

$$\ddot{u} + a^2 u = \beta\, G(t),$$

die wieder die Gestalt (1) besitzt.

§ 2. Der nichtlineare Resonanzfall. Wir betrachten jetzt an Stelle von (1) die entsprechende Schwingungsgleichung für den Fall, daß die elastische Kraft nichtlinear von der Lagekoordinate x abhängig ist:

$$\ddot{x} + f(x) = g(t), \qquad x(t+P) = x(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13);$$

neben (2) gelte jetzt noch $f(0) = 0$, was aber für die mathematische Behandlung unwesentlich ist. Dabei sei etwa $f(x)$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt für Argumentwerte x, die in einem abgeschlossenen Intervall liegen, welches alle von einer zu untersuchenden Lösung $x(t)$ von (13) angenommenen Werte im Innern enthält. Um es mit einem wirklichen nichtlinearen Problem zu tun zu haben, werden wir etwa noch voraussetzen, daß $f(x)$ nicht für alle x-Werte aus einem Intervall

$$\text{Min}\, x(t) - \varepsilon \leqq x \leqq \text{Max}\, x(t) + \varepsilon$$

mit beliebig kleinem ε verschwindet. $x(t)$ sei also eine bekannte mit P periodische Lösung von (13). Wir wollen jetzt bei beliebig kleinem β und mit P periodischem (stetigen) $G(t)$ die Gleichung

$$\ddot{y} + f(y) = g(t) + \beta\, G(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

auf zu $x(t)$ benachbarte mit P periodische Lösungen untersuchen. Wir betrachten neben (14) die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + f'(x)\,\varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15),$$

wo $x(t)$ die bekannte Lösung von (13) bedeutet, und werden zwei Fälle zu unterscheiden haben: a) (15) besitzt eine mit P periodische Lösung, b) (15) besitzt keine mit P periodische Lösung.

Zunächst wollen wir folgende Bemerkung voranschicken: In beiden Fällen gibt es beliebig kleine Funktionen $\beta\, G(t)$, so daß (14) eine zu $x(t)$ beliebig benachbarte mit P periodische Lösung $y(t)$ besitzt und daß außerdem

$$\int_{t^*}^{t^*+P} G(t)\,\varphi_1(t)\,dt \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

ausfällt für ein passendes t^* und mindestens eine Lösung $\varphi(t)$ von (15), die wir dann etwa als die eine Lösung $\varphi_1(t)$ eines Fundamentalsystems von (15) benutzen können. — Zum Beweis setze man

$$y(t) = x(t) + u(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

mit beliebigem zweimal stetig differenzierbaren, genügend kleinen und mit P periodischen $u(t)$ und rechne sich aus (14) das zugehörige $\beta\, G(t)$ aus. Es ergibt sich unter Benutzung des Taylorschen Satzes, wenn man (13) von (14) abzieht,

$$\ddot{u} + f'(x)\,u = \beta\, G(t) - \frac{1}{2} f''\big(x(t) + \vartheta(t)\,u(t)\big)\,u^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18);$$

dabei bedeutet $\vartheta(t)$ eine Funktion mit $0 \leqq \vartheta(t) \leqq 1$. Nun integriere man die aus (18) und (15) gebildete Lagrangesche Identität in einem Intervall der Länge P:

$$(\dot{u}\,\varphi - \dot{\varphi}\,u)\Big|_t^{t+P} = \beta \int_t^{t+P} G(t)\,\varphi(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_t^{t+P} f''(x + \vartheta\,u)\,u^2\,\varphi\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Die linke Seite lautet ausgeschrieben unter Beachtung der Periodizität von u:

$$\dot{u}(t)\,[\varphi(t+P) - \varphi(t)] + u(t)\,[\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(t+P)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Setzt man hier für $\varphi(t)$ nacheinander zwei linear unabhängige Lösungen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ von (15) ein und wählt für t denjenigen Wert t^*, wo $|u(t)|$ sein Maximum annimmt, so lauten die beiden Ausdrücke (20)

$$u(t^*)[\dot\varphi_1(t^*)-\dot\varphi_1(t^*+P)] \quad \text{bzw.} \quad u(t^*)[\dot\varphi_2(t^*)-\dot\varphi_2(t^*+P)].$$

Im Falle b) muß nun aber mindestens eine der beiden eckigen Klammern von Null verschieden sein; denn sonst würde für jede Lösung $\varphi(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$ von (15)

$$\dot\varphi(t^*)-\dot\varphi(t^*+P)=0$$

gelten, und man könnte C_1 und C_2 mit $C_1^2+C_2^2>0$ dann noch so bestimmen, daß auch

$$\varphi(t^*)-\varphi(t^*+P)=0$$

ausfällt; dieses $\varphi(t)$ wäre dann gegen die Voraussetzung b) eine mit P periodische Lösung von (15). Wir können nun annehmen, daß $\dot\varphi_1(t^*)-\dot\varphi_1(t^*+P)=\gamma\neq 0$ ist. Setzt man in (19) $t=t^*$ und $\varphi=\varphi_1$, so ist die linke Seite dem Betrage nach gleich $\gamma \operatorname{Max}|u|$, das ganz rechts in (19) stehende Glied ist kleiner als $\operatorname{Max}|u|^2$, also muß die Beziehung (16) zu Recht bestehen. — Im Falle a) wähle man als $\varphi_1(t)$ eine mit P periodische Lösung von (15). Dann verschwindet die linke Seite von (19) identisch in t und man kann ersichtlich t^* und $u(t)$ so wählen, daß

$$\int_{t^*}^{t^*+P} f''(x+\vartheta u)\,u^2\varphi_1\,dt \neq 0$$

ausfällt, woraus (16) folgt.

Es seien nun im Falle a) zwei wenig verschiedene mit P periodische Lösungen $x(t)$ von (13) und $y(t)$ von (14) bekannt. Was kann man über sie aussagen? Sei $\varphi_1(t)$ wie vorhin mit P periodische Lösung von (15). Dann verschwindet in (19) die linke Seite; setzt man nun dort wie vorhin $t=t^*$, so folgt wegen (16), daß β von kleinerer Ordnung ist als $\operatorname{Max}|u|$, nämlich

$$|\beta|\leq \operatorname{Const} \operatorname{Max}|u|^2.$$

Damit haben wir folgendes Resultat: Im Falle a) bringt eine zusätzliche kleine erzwingende Kraft, wofern sie nur einer Bedingung (16) genügt, eine zusätzliche periodische Schwingung mit einer Amplitude von höherer Größenordnung hervor, wenn überhaupt eine mit P periodische Lösung existiert. Das ist das Analogon zum linearen Resonanzfall; das schwingende System muß auf die Wirkung der Zwangskraft von der Periode P besonders empfindlich reagieren. Daher nennen wir den Fall a) den Resonanzfall beim nichtlinearen Schwingungsproblem, die Lösung $x(t)$ von (13) eine Resonanzlösung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß im Fall b), dem Nichtresonanzfall, die Größenordnungen der zusätzlichen Zwangskraft und der zusätzlichen mit P periodischen Schwingung gleich sein müssen. Dazu braucht, wie (19) zeigt, nur festgestellt zu werden, daß hier für $t=t^*$ und $\varphi=\varphi_1$ die linke Seite von der Größenordnung $\operatorname{Max}|u|$ ist; diese Einsicht haben wir uns aber schon vorhin verschafft.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die mathematische Charakterisierung des Resonanzfalles beim linearen und beim nichtlinearen Problem die gleiche ist; denn die ausschlaggebende Gl. (15) geht beim linearen Problem (1) in die dort ausschlaggebende Gl. (3) über. — Wir haben hier nur benutzt, daß es Funktionen $\beta\,G(t)$ gibt, für die (14) mit P periodische Lösungen besitzt. Die Entscheidung darüber, ob (14) zu einer vorgegebenen Funktion $\beta\,G(t)$ eine derartige Lösung besitzt, muß auf anderem Wege gewonnen werden. Ist $f(x)$ eine analytische Funktion von x im Bereich der in Frage kommenden x-Werte, so kann man die Entscheidung z. B. treffen unter Heranziehung der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen von E. Schmidt. In einer demnächst in den Mathematischen Annalen zum Abdruck kommenden Arbeit werde ich dieses Problem mit rein differentialgleichungstheoretischen Hilfsmitteln erledigen, ohne $f(x)$ als analytische Funktion voraussetzen zu müssen. — Es sei hier nur noch bemerkt, daß es im Nichtresonanzfall bei beliebig kleinem β höchstens eine zu $x(t)$ benachbarte Lösung $y(t)$ von (14) mit der Periode P geben kann. Gäbe es nämlich zwei solche Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$, so würde für deren mit P periodische Differenz $z(t)=y_2(t)-y_1(t)$ gelten

$$\ddot z + f'(\bar x)\,z = 0,$$

wo $\bar x(t)$ bei kleinem β beliebig wenig von $x(t)$ verschieden ist. Diese Gleichung kann aber bei genügend kleinem β nicht bestehen, da im Nichtresonanzfall (15) keine mit P periodische Lösung besitzt. Daß tatsächlich stets eine solche Lösung $y(t)$ von (14) vorhanden ist, wird z. B. in der oben erwähnten demnächst erscheinenden Arbeit gezeigt.

Man kann noch eine weitere Analogie zum linearen Resonanzfall herleiten durch Feststellung des folgenden Satzes: Sei im Falle a) (Resonanzfall) $y(t)$ eine beliebige, also nicht notwendig mit P periodische, Lösung von (14) bei genügend kleinem β, $u(t)$ werde daraus nach (17) bestimmt. Dann gibt es zwei Konstanten k und T derart, daß für gewisse Werte $t \leq \frac{T}{\sqrt{\beta}}$

$$|u(t)| \geq k\sqrt{\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

wird, vorausgesetzt, daß (16) zu Recht besteht für eine mit P periodische Lösung $\varphi_1(t)$ von (15). Mit anderen Worten: Jede durch eine zusätzliche mit P periodische Zwangskraft $\beta\, G(t)$ erreichbare Zusatzschwingung $u(t)$ nimmt für endlich große t-Werte Ausschläge von höherer Größenordnung an als die Amplitude dieser Zwangskraft. — Den Beweis kann man etwa so erbringen, wobei nicht der Ehrgeiz dahin gehen soll, die besten Schranken k und T zu erreichen. Ersetzt man in (19) φ durch φ_1 und P durch $n \cdot P$ mit beliebigem ganzzahligen n, so erhält man

$$\varphi_1(t)\,[\dot u(t+n\,P) - \dot u(t)] + \dot\varphi_1(t)\,[u(t) - u(t+n\,P)] + \frac{1}{2}\int\limits_t^{t+n\,P} f''(x+\vartheta\,u)\,u^2\,\varphi_1\,d\,t = n\,\beta\,A\,,$$

wenn gesetzt wird

$$A = \int\limits_t^{t+P} G(t)\,\varphi_1(t)\,d\,t \neq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Da $\varphi_1(t)$ nur bis auf einen Faktor bestimmt ist, können wir annehmen, daß $|\varphi_1(t)|$ und $|\dot\varphi_1(t)|$ kleiner 1 ausfällt. Setzen wir weiter den Fall, daß für alle Werte zwischen t und $t+n\,P$

$$|u(t)| \leq C \qquad \text{und} \qquad |\dot u(t)| \leq C$$

gilt, so finden wir aus der letzten Gleichung die Ungleichung

$$4\,C + \frac{1}{2}\,n\,P\,B\,C^2 \geq n\,\beta\,A\,,$$

wobei für alle z-Werte zwischen Min $x(t) - C$ und Max $x(t) + C$

$$|f''(z)| \leq B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

vorausgesetzt ist. Jetzt folgt aber sofort

$$C \geq \frac{4}{n\,P\,B}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{8}\,A\,B\,P\,n^2\,\beta}\right].$$

Wählt man nun n so groß, daß

$$\frac{1}{8}\,A\,B\,P\,n^2\,\beta > \frac{16}{9}\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \beta\,n^2\,P^2 > \frac{128}{9}\,\frac{P}{A\,B}$$

oder

$$T > \sqrt{\frac{128}{9}\,\frac{P}{A\,B}}\,, \qquad \text{so folgt} \qquad C > \sqrt{\frac{A}{P\,B}}\,\sqrt{\beta}\,;$$

denn es ist $\sqrt{1+a^2} > 1 + \frac{a}{2}$ für $a^2 > \frac{16}{9}$. Es ist also für ein $t \leq \frac{T}{\sqrt{\beta}}$ entweder einmal (21) mit

$$k = \sqrt{\frac{A}{P\,B}} \qquad \text{erfüllt oder} \qquad |\dot u(t)| \geq \sqrt{\frac{A}{P\,B}}\,\sqrt{\beta}\,.$$

Wäre im letzteren Fall etwa für alle t-Werte

$$|u(t)| \leqq \frac{1}{3M}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta} \quad \text{mit} \quad M = \operatorname{Max}|f'(x)| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24),$$

so würde aus (18) bei genügend kleinem β folgen

$$|\ddot{u}| \leqq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta}\,.$$

Sei jetzt etwa $t_1 \leqq \frac{T}{\sqrt{\beta}}$ ein Wert, für den

$$\dot{u}(t_1) \geqq \sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta}$$

ist $\left(\text{der Fall } \dot{u}(t_1) \leqq -\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta} \text{ erledigt sich analog}\right)$. Dann liegt für $t > t_1$ $u(t)$ oberhalb der Parabel

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta}\left[-\frac{1}{M} + 3(t-t_1) - (t-t_1)^2\right],$$

deren Maximum bei $t - t_1 = \frac{3}{2}$ liegt und den Wert

$$\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{M}\right)\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta}$$

besitzt; das widerspricht aber der Bedingung (24) im Falle $M \geqq 1$. Im Fall $M \leqq 1$ verwende man statt (24) die Ungleichung

$$|u(t)| \leqq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta},$$

das Maximum der entsprechenden Parabel liegt dann bei $t - t_1 = \frac{3}{2M}$ und hat den Wert

$$\left(\frac{9}{4M} - 1\right)\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A}{PB}}\sqrt{\beta},$$

was den gleichen Widerspruch liefert. — Auf alle Fälle ist demnach für genügend kleine β unsere Behauptung richtig, falls man setzt

$$k = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{Max}(M,1)}\sqrt{\frac{A}{PB}}, \qquad T = \sqrt{\frac{128}{9}\,\frac{P}{AB}} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\operatorname{Min}(M,1)} \quad \ldots \quad (25).$$

Wir fassen die Resultate zusammen in folgenden Sätzen, die alle nur für genügend kleine Werte von β Gültigkeit besitzen: 1. Im Nichtresonanzfall kann Gl. (14) höchstens eine zu $x(t)$ benachbarte mit P periodische Lösung $y(t)$ besitzen; die zusätzliche Schwingung $y(t) - x(t) = u(t)$ hat eine Amplitude der Ordnung β. 2. Im Resonanzfall können höchstens dann mit P periodische Zusatzschwingungen der Ordnung β auftreten, wenn

$$\int_t^{t+P} G(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

ist für jede mit P periodische Lösung $\varphi(t)$ von (15). 3. Ist (26) nicht erfüllt, so nimmt in endlicher Zeit jede Zusatzschwingung Werte der Größenordnung $\sqrt{\beta}$ an; insbesondere ist die Amplitude einer etwa existierenden mit P periodischen Zusatzschwingung mindestens von der Ordnung $\sqrt{\beta}$.

§ 3. Der Resonanzfall bei Schwingungen mit Geschwindigkeitsdämpfung. Wir wollen jetzt statt der Gl. (13) die allgemeinere Gleichung

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = g(t), \qquad x(t+P) = x(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

bei Gültigkeit von (2) in gleicher Weise behandeln. Sei $x(t)$ also mit P periodische Lösung von (27) und, um es wieder mit einem nichtlinearen Problem zu tun zu haben, die drei partiellen zweiten Ableitungen von $f(x, \dot{x})$ mögen nicht alle identisch verschwinden für Argumentwerte x und $\dot{x}$, die in einem Intervall $\text{Min}\, x(t) - \varepsilon \leqq x \leqq \text{Max}\, x(t) + \varepsilon$, bzw. $\text{Min}\, \dot{x}(t) - \varepsilon \leqq \dot{x} \leqq \text{Max}\, \dot{x}(t) + \varepsilon$ bei beliebig kleinem ε liegen. Gesucht seien mit P periodische Lösungen von

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = g(t) + \beta\, G(t), \qquad G(t+P) = G(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

Jetzt sprechen wir vom Resonanzfall, wenn mit den Bezeichnungen

$$a(t) = \frac{\partial f(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}, \qquad b(t) = \frac{\partial f(x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + a(t)\, \dot{\varphi} + b(t)\, \varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

eine mit P periodische Lösung $\varphi_1(t)$ besitzt.

Machen wir wieder die Substitution (17), so erhalten wir für $u(t)$ statt (18) die Gleichung

$$\ddot{u} + a(t)\, \dot{u} + b(t)\, u = \beta\, G(t) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial x^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial x\, \partial \dot{x}} u\, \dot{u} + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \dot{x}^2} \dot{u}^2 \right\} \quad . \; . \quad (31),$$

wo mit $\bar{x}(t)$ bzw. $\dot{\bar{x}}(t)$ Mittelwerte zwischen $x(t)$ und $x(t) + u(t)$ bzw. $\dot{x}(t)$ und $\dot{x}(t) + \dot{u}(t)$ bezeichnet sind. Schreiben wir für die rechte Seite von (31) abkürzend $F(t)$, so lautet (31)

$$\ddot{u} + a(t)\, \dot{u} + b(t)\, u = F(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32).$$

Für die zugehörige homogene Gl. (30) sei $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ein Fundamentalsystem. Wir bilden aus (32) und (30) die Lagrangesche Identität, multiplizieren sie mit einer später noch näher zu bestimmenden Funktion $p(t)$ und integrieren zwischen t^* und $t^* + P$:

$$\int_{t^*}^{t^*+P} p\, (\ddot{u}\, \varphi - \ddot{\varphi}\, u)\, dt + \int_{t^*}^{t^*+P} a\, p\, (\dot{u}\, \varphi - \dot{\varphi}\, u)\, dt = \int_{t^*}^{t^*+P} p\, \varphi\, F\, dt.$$

Wendet man auf das linke Integral Produktintegration an, so erscheint

$$p\, (\dot{u}\, \varphi - \dot{\varphi}\, u) \Big|_{t^*}^{t^*+P} + \int_{t^*}^{t^*+P} (\dot{u}\, \varphi - \dot{\varphi}\, u)\, (a\, p - \dot{p})\, dt = \int_{t^*}^{t^*+P} p\, \varphi\, F\, dt.$$

Das Integral linker Hand verschwindet, wenn man setzt

$$p(t) = e^{\int_{t^*}^{t} a(t)\, dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33),$$

so daß unter Beachtung der Periodizitätseigenschaft von $u(t)$ übrig bleibt

$$\dot{u}(t^*)\, [p(t^* + P)\, \varphi(t^* + P) - p(t^*)\, \varphi(t^*)] + u(t^*)\, [p(t^*)\, \dot{\varphi}(t^*) - p(t^* + P)\, \dot{\varphi}(t^* + P)] = \int_{t^*}^{t^*+P} p\, \varphi\, F\, dt \quad (34).$$

Wir setzen jetzt unter der Annahme, daß für ein Fundamentalsystem $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ von (30) $\varphi_1(t)$ mit P periodisch ist,

$$\varphi(t) = \varkappa\,\varphi_1(t) + \lambda\,\varphi_2(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

und suchen $\varkappa$ und λ so zu bestimmen, daß die linke Seite von (34) verschwindet. Bildet man aus (30) für $\varphi_1(t)$ und $\varphi(t)$ die Lagrangesche Identität, multipliziert mit $p(t)$, integriert und wendet auf das erste Integral wie oben partielle Integration an, so erscheint

$$\dot\varphi_1(t^*)\,[p(t^*+P)\,\varphi(t^*+P) - p(t^*)\,\varphi(t^*)] = \varphi_1(t^*)\,[p(t^*+P)\,\dot\varphi(t^*+P) - p(t^*)\,\dot\varphi(t^*)] \quad . \quad (36).$$

Wählt man jetzt für t^* eine Stelle, an der

$$\dot\varphi_1(t^*) = 0$$

gilt — eine solche Stelle ist stets vorhanden —, so verschwindet in (34) die zweite eckige Klammer linker Hand; damit auch die erste verschwindet, muß man nur in (35) $\varkappa$ und λ so bestimmen, daß

$$p(t^*+P)\,[\lambda\,\varphi_2(t^*+P) + \varkappa\,\varphi_1(t^*)] = p(t^*)\,[\lambda\,\varphi_2(t^*) + \varkappa\,\varphi_1(t^*)] \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

ausfällt.

Fall I. Es sei

$$\varphi_2(t^*+P) - \varphi_2(t^*) \neq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38),$$

so daß also $\varphi_2(t)$ sicher nicht die Periode P besitzt. Im Falle $p(t^*+P) = p(t^*)$ setze man $\lambda = 0$, im anderen Falle kann man zu jedem $\lambda \neq 0$ eindeutig $\varkappa$ so bestimmen, daß (37) erfüllt ist, da der Faktor von $\varkappa$

$$\varphi_1(t^*)\,[p(t^*+P) - p(t^*)] \neq 0$$

ausfällt. In jedem Falle läßt sich also hier eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Funktion $\varphi(t)$ erhalten, derart, daß die linke Seite von (34) verschwindet.

Fall II. Jetzt ist noch die Möglichkeit

$$\varphi_2(t^*+P) - \varphi_2(t^*) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

zu betrachten. Dann wird aus (37)

$$[p(t^*+P) - p(t^*)]\,[\lambda\,\varphi_2(t^*) + \varkappa\,\varphi_1(t^*)] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

Ist

$$p(t^*+P) = p(t^*) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41),$$

so folgt wegen

$$p(t^*+P)\,\dot\varphi_2(t^*+P) - p(t^*)\,\dot\varphi_2(t^*) = 0$$

(nach (36)) sofort

$$\dot\varphi_2(t^*+P) = \dot\varphi_2(t^*)$$

und somit, daß auch $\varphi_2(t)$ mit P periodisch ist. In diesem Fall kann man in (40) λ und $\varkappa$ beide willkürlich lassen. Übrigens folgt noch aus der für alle t gültigen Gl. (36), wenn man dort $\varphi_2(t)$ für $\varphi(t)$ einsetzt, daß auch $p(t)$ mit P periodisch ist.

Ist dagegen

$$p(t^*+P) \neq p(t^*) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42),$$

so ist (40) wieder für eine bis auf einen Faktor bestimmte Funktion $\varphi(t)$ erfüllt und $\varphi_2(t)$ ist nicht mit P periodisch.

Wir schließen noch die Bemerkung an, daß in allen betrachteten Fällen die Funktion $z(t) = p(t) \cdot \varphi(t)$ eine mit P periodische Funktion ist, wenn für $\varphi(t)$ eine der vorhin ausgezeichneten Lösungen von (30) eingesetzt wird. Denn erstens genügt $z(t)$ der linearen Differentialgleichung

$$\ddot{z} - a\,\dot{z} + (b - \dot{a})\,z = 0,$$

welche mit P periodische Koeffizienten besitzt; zweitens folgt aus unseren früheren Überlegungen (vgl. (37))

$$z(t^* + P) = z(t^*),$$

und drittens ist wegen (36) und

$$\dot{z}(t) = p(\dot{\varphi} + a\,\varphi)$$

auch

$$\dot{z}(t^* + P) = \dot{z}(t^*);$$

aus diesen Eigenschaften folgt aber die Behauptung.

Behandelt man jetzt (34) wie früher (19), so findet man wieder die typische Resonanzerscheinung: Mit einer zusätzlichen kleinen mit P periodischen erzwingenden Kraft $\beta\,G(t)$ ist im Resonanzfall nur eine zusätzliche mit P periodische Schwingung $u(t)$ verträglich, deren Amplitude mindestens von der Größenordnung $\sqrt{\beta}$ ist, wenn $G(t)$ einer Bedingung

$$\int_t^{t+P} G(t)\,p(t)\,\varphi(t)\,d\,t \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

genügt; dabei ist $p(t)$ durch (33) definiert mit beliebigem t^*, $\varphi(t)$ ist im Falle, daß beide Lösungen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ eines Fundamentalsystems von (30) mit P periodisch sind, eine beliebige Lösung von (30); falls nur $\varphi_1(t)$ mit P periodisch ist, ist $\varphi(t)$ eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Lösung von (30), und zwar derart, daß $p(t) \cdot \varphi(t)$ mit P periodisch ist.

Um jetzt noch einzusehen, daß im Nichtresonanzfall, wenn also keine Lösung $\varphi(t)$ von (30) mit P periodisch ist, ein mit P periodisches $u(t)$ von der Größenordnung β ist, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß für eine Stelle t^*, wo $|u(t)|$ sein Maximum annimmt, die linke Seite von (34) durch Wahl eines passenden $\varphi(t)$ von Null verschieden gemacht werden kann, d. h. daß

$$p(t^* + P)\,\dot{\varphi}(t^* + P) \neq p(t^*)\,\dot{\varphi}(t^*)$$

zu erreichen ist. Daß dies immer möglich ist, folgt aus der schon in § 2 gemachten Bemerkung, daß nicht für jede Lösung $\varphi(t)$ von (30) $\dot{\varphi}(t^* + P) = \dot{\varphi}(t^*)$ sein kann und somit der Quotient $\dot{\varphi}(t^* + P) : \dot{\varphi}(t^*)$ jeden beliebigen Wert annehmen kann durch passende Wahl von $\varphi(t)$.

Wie in § 2 folgt übrigens wieder, daß im Resonanzfall j e d e zusätzliche Schwingung $u(t)$ bei genügend großem t Werte mindestens der Ordnung $\sqrt{\beta}$ annehmen muß. Ferner, daß im Nichtresonanzfall Gl. (28) höchstens eine zu $x(t)$ benachbarte mit P periodische Lösung besitzt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich alle Ausführungen unverändert auch auf die Gleichung

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = g(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

übertragen, wenn für jedes Wertepaar $x, \dot{x}$ die Funktion f in der dritten Variablen t mit P periodisch ist. Auch auf noch weitergehende Verallgemeinerungen ist der geschilderte Beweisgang anwendbar.

Über den Strömungsvorgang an einer unterströmten scharfkantigen Planschütze.

Von *Georg Pajer* in Prag.

1. Einleitung. Bei den früheren Lösungen des ebenen Strömungsvorganges durch scharfkantige Öffnungen (siehe z. B. [1] bis [3][1])) wurde die Schwerewirkung vernachlässigt, d. h., die Ausflußgeschwindigkeit längs der freien Strahlgrenze konstant angenommen. Wir legen unserer Betrachtung den in Abb. 1 angedeuteten Fall zugrunde und werden ver-

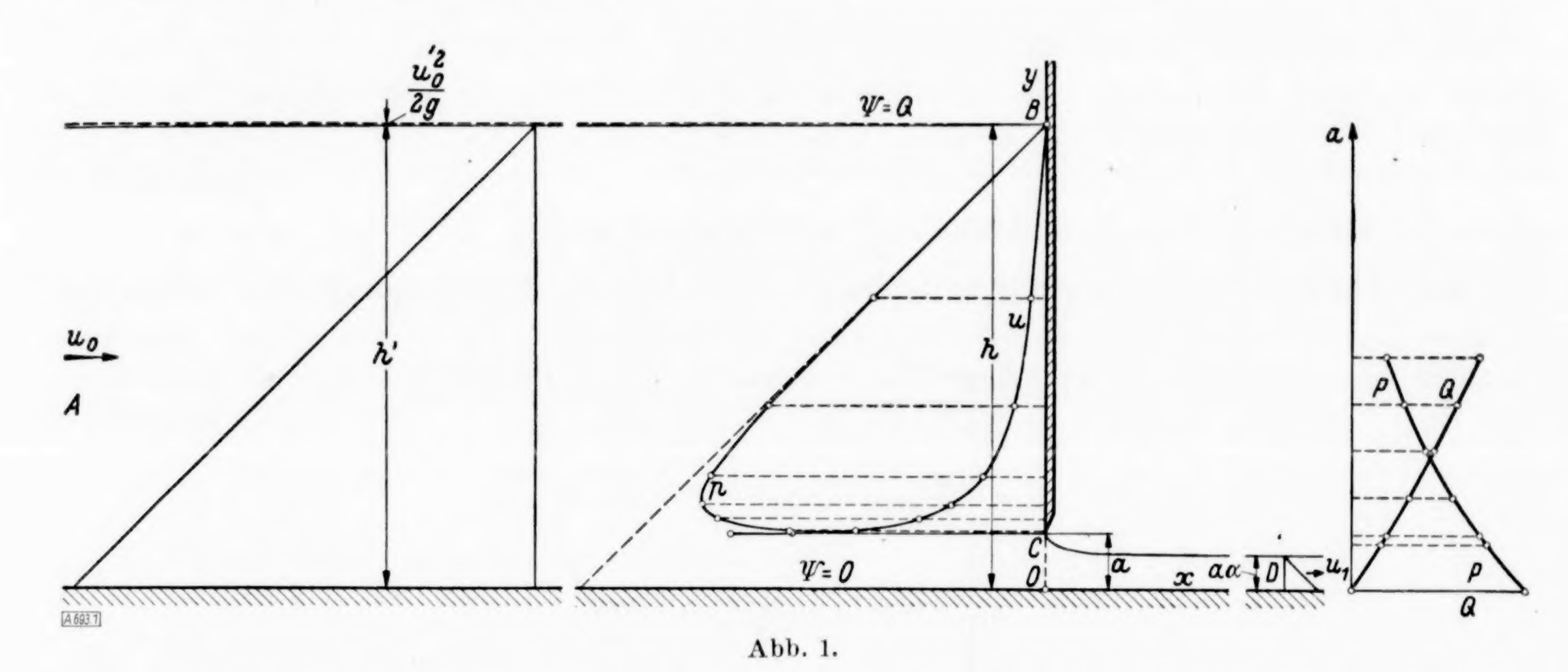


Abb. 1.

suchen, die Änderung der Geschwindigkeit an der Absenkungskurve $C\,D$ angenähert zu berücksichtigen. Wir wollen die Form dieser Stromlinie, die Druckverteilung an der Planschütze $B\,C$, die Sohldrücke, sowie den Geschwindigkeitsverlauf im Querschnitt $\overline{O\,C}$ für ebene Potentialströmung mit Hilfe eines Hodographenverfahrens ermitteln.

Bezeichnet man die Bewegungsebene mit $z = x + i\,y$, das komplexe Potential mit $\Phi + i\,\Psi$ und die Komponenten der Geschwindigkeit mit $u_x = u \cos\vartheta$, $u_y = u \sin\vartheta$, so stellt die bekannte Grundformel

$$z - z_0 = \int\limits_{\Phi_0 + i\Psi_0}^{\Phi + i\Psi} \frac{d(\Phi + i\,\Psi)}{u_x - i\,u_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für $\Psi =$ konst., $d\,\Psi = 0$ die Gleichung einer Stromlinie dar, die man nach Zerlegung in der Form

$$x - x_0 = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{\cos\vartheta}{u}\,d\,\Phi = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} \left(\frac{1}{u}\right)_x d\,\Phi = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} v_x\,d\,\Phi \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$y - y_0 = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{\sin\vartheta}{u}\,d\,\Phi = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} \left(\frac{1}{u}\right)_y d\,\Phi = \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} v_y\,d\,\Phi \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

schreiben kann. Die Größen $\left(\frac{1}{u}\right)_x = v_x$, $\left(\frac{1}{u}\right)_y = v_y$ kann man als Komponenten der reziproken Geschwindigkeit $v = \frac{1}{u_x - i\,u_y}$ auffassen. Der Plan der reziproken Geschwindigkeiten einer Stromlinie, von welchen wir bei der Lösung ausgehen werden, entsteht, wenn von einem festen Punkte aus Vektoren aufgetragen werden, die die Richtung der Geschwindigkeit — vom Betrage $\left|\frac{1}{u}\right|$ — besitzen. Aus der Gl. (1) geht hervor, daß der Plan der reziproken Geschwindigkeiten aller Stromlinien — den wir weiter als „v-Plan" bezeichnen wollen — eine konforme Abbildung des Strömungsvorganges in der z-Ebene darstellt.

[1]) Siehe den am Ende der Arbeit befindlichen Schriftennachweis, auf den sich die Zahlen in eckigen Klammern beziehen.

Für den vorliegenden Fall wird die Form des ν-Planes durch folgende Annahmen beeinflußt:

I. Die freie Oberfläche AB in Abb. 1 sei horizontal. Es bleibt unberücksichtigt, daß sich die Stromlinie $\Psi = Q$ allmählich bis zur Geschwindigkeitshöhe der Zuströmungsgeschwindigkeit u_0' über den ungestörten Spiegel im Querschnitt A heben muß.

II. Im Plan der reziproken Geschwindigkeiten wird die der Absenkungskurve CD entsprechende Linie durch eine Viertelellipse ersetzt (Abb. 3a). Die Gleichung für die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{2\,g\,(h - y)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

ist nur in zwei Punkten CD der Absenkungskurve erfüllt. Es wird gezeigt werden, daß bei dieser Annahme die Abweichungen zwischen den aus dem Geschwindigkeitsplan und aus dem Ausdruck (4) berechneten Geschwindigkeiten $(|u| - |w|)$ in anderen Punkten der Strahlgrenze für kleinere Öffnungsverhältnisse $\frac{a}{h}$ unbedeutend sind.

Den Umriß des Geschwindigkeitsplanes zeigt Abb. 2, der entsprechende ν-Plan ist in

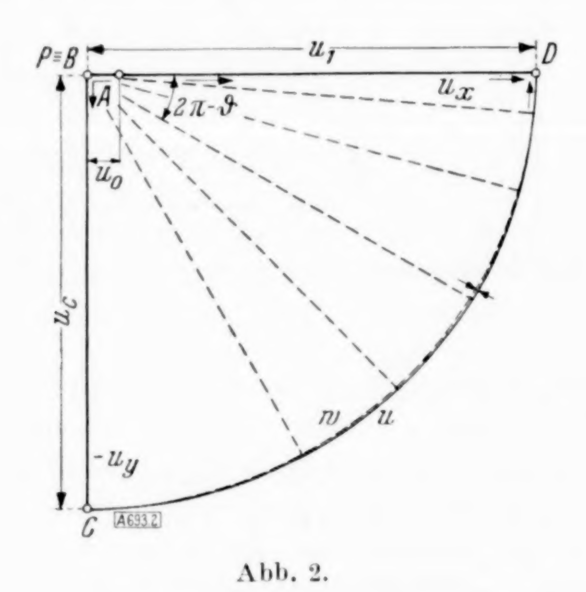


Abb. 2.

Abb. 3a durch die schraffierte, ins Unendliche sich erstreckende Fläche dargestellt. Im unendlich fernen Querschnitt A (Abb. 1) herrscht eine waagerecht gerichtete Geschwindigkeit u_0.

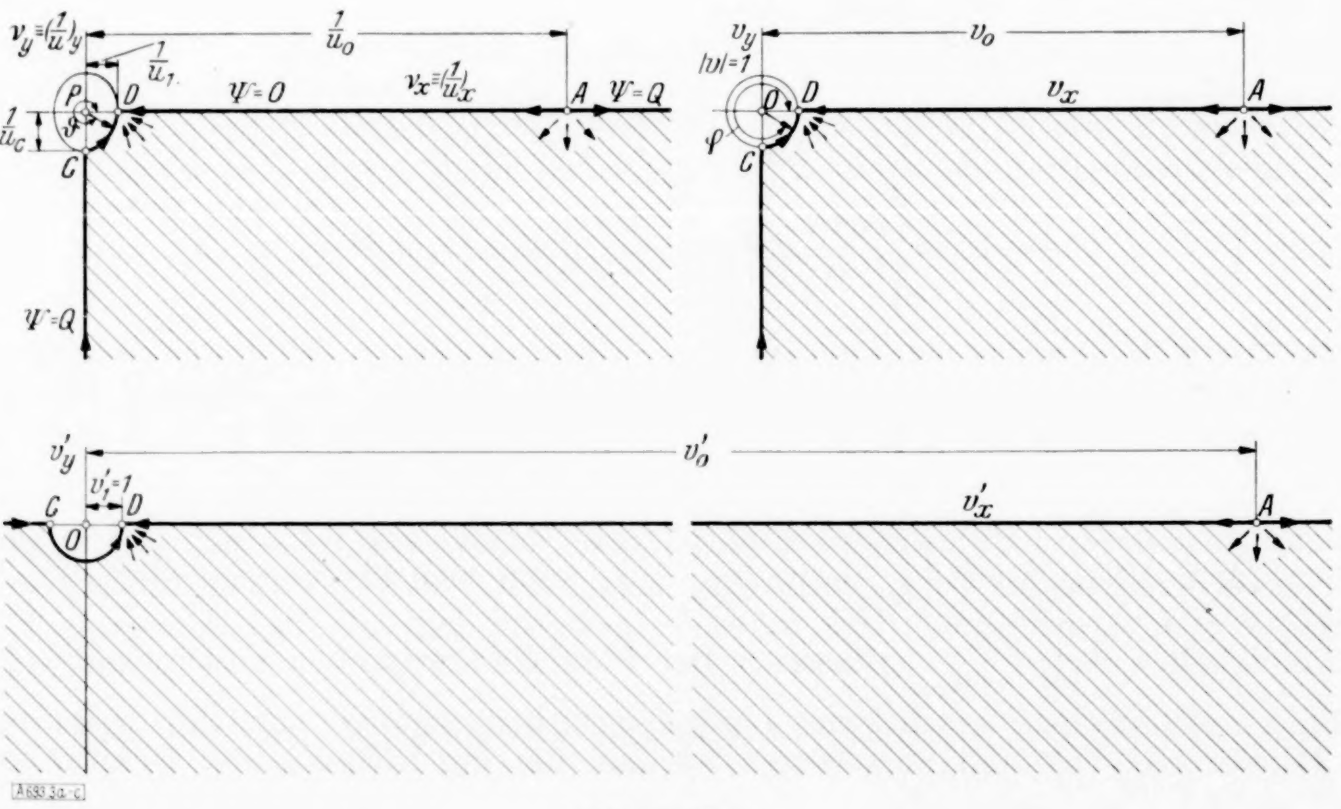


Abb. 3a bis c.

Der Punkt A stellt die Quelle aller Stromlinien dar. Auf der unteren Grenzstromlinie $\Psi = 0$ behält die Geschwindigkeit die horizontale Richtung bei und nimmt von u_0 auf

$$u_1 = \sqrt{2\,g\,(h - \alpha\,a)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

zu, so daß die entsprechenden Punkte im Hodographen und im ν-Plan auf der Strecke $A\,D$ liegen. Der Punkt D fällt mit der Senke aller Stromlinien zusammen. Der Linienzug $A\,B\,C\,D$ entspricht der oberen begrenzenden Stromlinie $\Psi = Q$. Im Punkte B ist die Geschwindigkeit gleich Null und im Punkte C hat sie den Betrag

$$u_C = \sqrt{2\,g\,(h-a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Die Größe u_1 hängt von der Kontraktionszahl a ab, die wir später bestimmen werden.

2. Potentialverteilung über den Plan der reziproken Geschwindigkeiten. Es muß betont werden, daß die eigentliche Aufgabe darin besteht, $\Phi + i\,\Psi$ als Funktion der komplexen Variablen $\frac{1}{u_x - i\,u_y} = \nu$ zu bestimmen, was auf Grund der Annahme II elementar möglich ist. Wie bekannt, kann man das Außengebiet der in Abb. 3a dargestellten Ellipse in der ν-Ebene konform auf das Außengebiet des Einheitskreises in der v-Ebene (Abb. 3b) mit Hilfe der Beziehung

$$k\,\nu = v - \frac{\lambda^2}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

übertragen, worin $v = |v|\,e^{i\varphi}$ eine komplexe Veränderliche, k und λ Konstanten bedeuten (k bestimmt hierbei den Maßstab der Abbildung). Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil entsteht

$$\nu_x = \frac{\cos\vartheta}{|u|} = \frac{1}{k}\left(|v| - \frac{\lambda^2}{|v|}\right)\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

$$\nu_y = \frac{\sin\vartheta}{|u|} = \frac{1}{k}\left(|v| + \frac{\lambda^2}{|v|}\right)\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

In der vorliegenden Aufgabe kommen nur die vierten Quadranten beider Ebenen in Betracht.

Führt man an Stelle von v die Veränderliche

$$v' = v^2 \cdots\cdots\cdots |v'|\,e^{i\varphi'} = v_1^2\,e^{2\,i\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ein, so geht der Viertelkreis $|v| = 1$ in einen Halbkreis über. Das Außengebiet des Halbkreises in der unteren Hälfte der v'-Ebene (Abb. 3c) wird weiter durch die Funktion

$$v'' = v' + \frac{1}{v'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

auf die ganze untere Halbebene $v'' = v_x'' + i\,v_y'' = |v''|\,e^{i\varphi''}$ (Abb. 4) konform abgebildet. Dem Kreisbogen $|v'| = 1$ entspricht die Strecke $\overline{-2+2}$ auf der v_x''-Achse, denn

$$v'' = e^{2\,i\,\varphi} + e^{-2\,i\,\varphi} = 2\cos 2\,\varphi = v_x'',\ v_y'' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11\text{a}).$$

Alle Stromlinien bilden in der v''-Ebene eine Kreisschar, welche durch die Punkte

$$A\left(v''_{0\,x} = v_0^2 + \frac{1}{v_0^2},\ v''_{0\,y} = 0\right) \quad \text{und} \quad D\,(v''_{1\,x} = 2,\ v''_{1\,y} = 0)$$

geht. Ihre konforme Abbildung in parallele Stromlinien $\Psi = 0$ bis $\Psi = Q$ auf dem Streifen der $\Phi + i\,\Psi$-Ebene läßt sich durch die Funktion

$$\Phi + i\,\Psi = \frac{Q}{\pi}\ln\left(-\frac{v_0'' - v''}{v_1'' - v''}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

vermitteln. Im vorliegenden Fall ist $v_1'' = 2$.

3. Die Gleichung der Absenkungskurve $\widehat{C\,D}$. Es werden nun alle Veränderlichen in den Integralen (2), (3) als Funktionen des Winkels $\sphericalangle\,\varphi$ dargestellt werden. Dann gilt nach den Ausdrücken (11a), (12) für die Punkte des Einheitskreises (Abb. 3b)

$$\Phi + i\,\Psi = \frac{Q}{\pi}\left[\ln\left(v_0'' - 2\cos 2\,\varphi\right) - \ln\left(2 - 2\cos 2\,\varphi\right)\right] + i\,Q\,,$$

$$d\,\Phi = \frac{4\,Q}{\pi}\left(\frac{\sin 2\,\varphi}{v_0'' - 2\cos 2\,\varphi} - \frac{\sin 2\,\varphi}{2\,(1-\cos 2\,\varphi)}\right)d\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Setzt man die Größen (8) und (13) in das Integral (2) ein, so entsteht ($|v| = 1$, $x_0 \equiv x_C = 0$)

$$x = \frac{4\,Q}{\pi\,k}(1-\lambda^2)\left(\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot d\varphi}{\frac{v_0{}^2}{2}-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot d\varphi}{1-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\right).$$

In diesen Ausdruck führt man (siehe die Beziehung (8))

$$Q = a\,\alpha\,u_1 = a\,\alpha\,\frac{k}{1-\lambda^2} \quad \text{. . . . . (14)}$$

ein. Nach kurzer Zwischenrechnung ergibt sich

$$x = \frac{2\,a\,\alpha}{\pi}\left(-\int\limits_0^{\cos\varphi}\frac{\cos^2\varphi\cdot d\cos\varphi}{\frac{v_0''+2}{4}-\cos^2\varphi}+\int\limits_0^{\cos\varphi}\frac{\cos^2\varphi\cdot d\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}\right).$$

Beide Integrale sind von der Form

$$\int\limits_0^z\frac{z^2\,dz}{b^2-z^2} = \int\limits_0^z\left(-1+\frac{b^2}{b^2-z^2}\right)d\,z = -z+\frac{b}{2}\ln\frac{b+z}{b-z}.$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$b = \frac{\sqrt{v_0''+2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{v_0{}^2+\frac{1}{v_0{}^2}+2} = \frac{1}{2}\left(v_0+\frac{1}{v_0}\right)$$

erhält man schließlich

$$\underline{x = \frac{2\,a\,\alpha}{\pi}\left[-\frac{b}{2}\ln\frac{b+\cos\varphi}{b-\cos\varphi}+\ln\left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]} \quad \text{. . . . . (15).}$$

Die Gl. (3) ergibt mit Rücksicht auf (9), (13), (14)

$$y-a = \frac{2\,a\,\alpha}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\left(\int\limits_{-1}^{\sin\varphi}\frac{\sin^2\varphi\cdot d\sin\varphi}{\frac{v_0''-2}{4}+\sin^2\varphi}-\sin\varphi-1\right).$$

Mit der Abkürzung

$$c = \frac{\sqrt{v_0''-2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{v_0{}^2+\frac{1}{v_0{}^2}-2} = \frac{1}{2}\left(v_0-\frac{1}{v_0}\right) = \frac{v_0{}^2-1}{2\,v_0}$$

erhalten wir schließlich

$$\underline{y = a\left[1-\frac{2\,\alpha}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\cdot c\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{c}+\operatorname{arctg}\frac{1}{c}\right)\right]} \quad \text{. . . . . (16).}$$

Zur Auswertung der Koordinaten x, y muß die Kontraktionszahl α ermittelt werden. Die Gl. (16) liefert, wenn man $\varphi = 2\,\pi$ setzt

$$y_D = a\,\alpha = a\left(1-\frac{2\,\alpha}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\cdot\frac{v_0{}^2-1}{2\,v_0}\operatorname{arctg}\frac{2\,v_0}{v_0{}^2-1}\right).$$

Mit Vorteil führt man einen Hilfswinkel

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2\,v_0}{v_0{}^2-1} = \operatorname{arcctg}\frac{v_0{}^2-1}{2\,v_0}$$

ein.

$$\left(0\leqq\varepsilon\leqq\frac{\pi}{2},\quad \text{denn} \quad \infty\geqq v_0=\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\geqq 1 \quad \text{ist}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1+\frac{2}{\pi}\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\varepsilon\cdot\operatorname{ctg}\varepsilon \quad \text{. . . . . (17).}$$

Aus dieser Gleichung kann man das Einschnürungsverhältnis $\alpha = \frac{y_D}{a}$ noch nicht berechnen, weil die Größen λ, ε von α abhängen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung müssen jetzt die Bedingungsgleichungen (5), (6) in Betracht gezogen werden. Für den Querschnitt D ergibt die Beziehung (8) ($\varphi = 2\pi$, $\vartheta = 2\pi$)

$$\frac{k}{u_1} = \frac{k}{\sqrt{2g(h - \alpha a)}} = 1 - \lambda^2.$$

Setzt man $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ in den Ausdruck (9) ein, so wird

$$\frac{k}{u_C} = \frac{k}{\sqrt{2g(h - a)}} = 1 + \lambda^2.$$

Nach Lösung beider Gleichungen erhalten wir

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha a}{h}} - \sqrt{1 - \frac{a}{h}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha a}{h}} + \sqrt{1 - \frac{a}{h}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

$$k = \sqrt{2gh}\, \frac{2\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha a}{h}\right)\left(1 - \frac{a}{h}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha a}{h}} + \sqrt{1 - \frac{a}{h}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Der Hilfswinkel ε kann aus der Kontinuitätsgleichung ermittelt werden:

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{\alpha a}{h} = \frac{1 - \lambda^2}{v_0 - \frac{\lambda^2}{v_0}} = \frac{1 - \lambda^2}{\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda^2}{\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}}},$$

$$v_0 \equiv \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(1 - \lambda^2) h}{2 \alpha a} + \sqrt{\frac{(1 - \lambda^2)^2 h^2}{4 a^2 \alpha^2} + \lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Aus den Gl. (17), (18), (20) geht hervor, daß α theoretisch nur vom Öffnungsverhältnis $\frac{a}{h}$ abhängt. Die Ermittlung von $\alpha, \lambda, \varepsilon$ aus den Beziehungen (17), (18), (20) sei an folgendem Zahlenbeispiel gezeigt.

Beispiel: Gegeben $h = 1{\cdot}5$ m, $a = 0{\cdot}18$ m, $\left(\frac{a}{h} = 0{\cdot}12\right)$. Zu dem gewählten $\alpha = 0{\cdot}610$ berechnet man die Größen λ^2, ε und setzt sie in die Gl. (17) ein. Daraus $\alpha = 0{\cdot}6065$. Wählt man jetzt $\alpha = 0{\cdot}60653$, so ergibt die Gl. (18) $\lambda^2 = 0{\cdot}013065$, die Gl. (20) $\varepsilon = 8^0\, 26'\, 05''$ (und damit $v_0 = 13{\cdot}5611$). Der Ausdruck (17) bestätigt die richtige Wahl von α. Nach Berechnung der Konstanten $b = 6{\cdot}8174$, $c = 6{\cdot}7437$ lassen sich die Koordinaten der Absenkungskurve ermitteln (Zahlentafel 1). Man kann auch die Abweichungen in einzelnen Punkten der Strom-

Zahlentafel 1.

$2\pi - \varphi$	90°	60°	45°	30°	15°	5°	0°
x (m)	0·00000	0·00337	0·01193	0·03101	0·07333	0·14789	∞
$(a - y)$ (m)	0·00000	0·00938	0·02056	0·03523	0·05237	0·06459	0·07082
$\|w\|$ (m/sec)	5·089	5·1070	5·1285	5·1565	5·1890	5·2121	5·2238
$\|u\|$ (m/sec)	5·089	5·1217	5·1550	5·1891	5·2144	5·2226	5·2238
$\|u\| - \|w\|$ (m/sec)	0·000	0·0147	0·0265	0·0326	0·0254	0·0105	0·0000

linie von der Gl. (4) für $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ überprüfen. Die Beziehungen (8), (9) ergeben nach

Elimination des Winkels ϑ eine dem Hodographen entsprechende Geschwindigkeit

$$|u| = \frac{k}{\sqrt{1+\lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi}}.$$

Da der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten u und w unbedeutend ist

$$\left(\text{für } \frac{a}{h} = 0{\cdot}12 \text{ ist } \frac{|u|-|w|}{|u|} \max 0{\cdot}63\,\%, \quad \text{für } \frac{a}{h} = 0{\cdot}5 \text{ ist } \frac{|u|-|w|}{|u|} \max 3{\cdot}8\,\%\right),$$

scheint die Wahl der Funktion (7) für die beschriebene Näherungslösung berechtigt.

In der Zahlentafel 2 sind die theoretischen Werte von α, sowie die Koordinaten der Absenkungskurven für verschiedene Verhältnisse $\frac{a}{h}$ angegeben[2]). Es ist bemerkenswert, daß die Stromlinien für jede Öffnungsweite a, wenn $0 \leqq \frac{a}{h} \leqq 0{\cdot}5$, nur unbedeutend voneinander abweichen, obwohl das Verhältnis $\frac{|u_D|-|u_C|}{|u_D|}$ sich zwischen 0 und 18 % bewegt. Aus dieser „Stabilität" der Absenkungskurve gegen Änderung des Geschwindigkeitsplanes läßt sich schließen, daß die einer strengen Lösung entsprechende Strombegrenzung sich nur wenig von der ermittelten Kurve unterscheiden kann.

Zahlentafel 2

$\frac{a}{h}$		0	0·2	0·3	0·4	0·5
α		0·6110	0·6046	0·6036	0·6043	0·6066
x(m)	$\varphi = 300°$	0·001925	0·00360	0·00504	0·00605	0.00655
	$\varphi = 315°$	0·00678	0·01287	0·01822	0·02232	0·02473
	$\varphi = 330°$	0·01754	0·03370	0.04848	0·06080	0·06960
	$\varphi = 345°$	0·04130	0·08031	0·11744	0·15109	0·17947
	$\varphi = 355°$	0·08308	0·16281	0·24069	0·31495	0·33932
$(a-y)$(m)	$\varphi = 300°$	0·00521	0·01025	0·01475	0·01673	0·02071
	$\varphi = 315°$	0·01140	0·02259	0·03286	0·03991	0·04798
	$\varphi = 530°$	0·01945	0·03893	0·05732	0·07219	0·08744
	$\varphi = 345°$	0·02883	0·05821	0·08680	0·11214	0·13838
	$\varphi = 355°$	0·03549	0·07203	0·10813	0·14155	0·17689

4. Druckverteilung längs der Schütztafel und längs der Sohle. Das Integral (3) lautet nach Einführung von $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$

$$\int_y^h d\,y = h - y = -\int_{\Phi}^{\Phi_B} \frac{d\,\Phi}{|u|} \quad \text{. . . . . (3a).}$$

Es ist zweckmäßig, $\frac{1}{|u|}$ und Φ als analytische Funktionen der Veränderlichen $|v|$ (Abb. 3b) auszudrücken

$$\frac{1}{|u|} = \frac{1}{k}\left(|v| + \frac{\lambda^2}{|v|}\right) \quad \text{. . . . . (9a),}$$

[2]) Für $\frac{a}{h} = 0$ ist $a = 0{\cdot}1$ m, für $\frac{a}{h} = 0{\cdot}2 - 0{\cdot}5$ ist $h = 1$ m.

$$\Phi + i\,\Psi = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{v'' - v_0''}{v'' - 2} + i\,Q = \frac{Q}{\pi}\left[\ln(v_0' - v') + \ln\left(\frac{1}{v_0'} - v'\right) - 2\ln(1 - v')\right] + i\,Q$$

$$= \frac{Q}{\pi}\left[\ln(v_0^2 - v^2) + \ln\left(\frac{1}{v_0^2} - v^2\right) - 2\ln(1 - v^2)\right] + i\,Q.$$

Für die Strecke $\overline{BC}$ gilt

$$v = -i\,|v| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

$$\Phi = \frac{a\,\alpha\,k}{\pi(1-\lambda^2)}\left[\ln(v_0^2 + |v|^2) + \ln\left(\frac{1}{v_0^2} + |v|^2\right) - 2\ln(1 + |v|^2)\right],$$

$$d\,\Phi = \frac{2\,a\,\alpha\,k}{\pi(1-\lambda^2)}\left(\frac{|v|}{v_0^2 + |v|^2} + \frac{|v|}{\frac{1}{v_0^2} + |v|^2} - \frac{2\,|v|}{1 + |v|^2}\right) d\,|v| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Setzt man die Ausdrücke (9a), (22) in das Integral (3a) ein, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} h - y &= -\frac{2\,a\,\alpha}{\pi(1-\lambda^2)} \int_{|v|}^{\infty} \left(\frac{|v|^2 + \lambda^2}{v_0^2 + |v|^2} + \frac{|v|^2 + \lambda^2}{\frac{1}{v_0^2} + |v|^2} - 2\,\frac{|v|^2 + \lambda^2}{1 + |v|^2}\right) d\,|v| \\ &= \frac{2\,a\,\alpha}{\pi(1-\lambda^2)} \int_{\infty}^{|v|} \left(-\frac{v_0^2 - \lambda^2}{v_0^2 + |v|^2} - \frac{\frac{1}{v_0^2} - \lambda^2}{\frac{1}{v_0^2} + |v|^2} + 2\,\frac{1 - \lambda^2}{1 + |v|^2}\right) d\,|v| \\ &= \frac{2\,a\,\alpha}{\pi(1-\lambda^2)} \left[\left(v_0 - \frac{\lambda^2}{v_0}\right) \operatorname{arcctg} \frac{|v|}{v_0} + \left(\frac{1}{v_0} - \lambda^2 v_0\right) \operatorname{arcctg} v_0\,|v| - 2(1 - \lambda^2) \operatorname{arcctg} |v|\right] \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Wählt man für die Veränderliche $|v|$ einen Wert zwischen $1 \div \infty$ und berechnet aus der Beziehung (9a) die entsprechende Geschwindigkeit u, so kann mit Hilfe der Gl. (23) jener Punkt der Schütztafel ermittelt werden, in welchem diese Geschwindigkeit auftritt. In der Zahlentabelle 3 sind die Geschwindigkeiten und Drücke, die aus der Bernoullischen Gleichung ermittelt wurden, für einige Punkte der Planschütze ($h = 1{\cdot}50$ m, $a = 0{\cdot}18$ m) eingetragen.

Zahlentafel 3.

$\frac{1}{\lvert v \rvert}$	0	0·05	0·10	0·20	0·30	0·40	0·60	0·80	1·00
$-u$ (m/sec) . .	0	0·2578	0·5155	1·0306	1·5448	2·0579	3·0788	4·090	5·089
$\frac{u^2}{2g}$ (m)	0	0·0034	0·0135	0·05413	0·12164	0·2158	0·4831	0·8531	1·3200
$h - y$ (m) . . .	0	0·5620	0·9079	1·1351	1·2291	1·2729	1·3078	1·3180	1·3200
$\frac{p}{\gamma}$ (m)	0	0·5586	0·8944	1·0810	1·1075	1·0571	0·8247	0·4649	0·0000

Ähnlich kann man die Bodendrücke ermitteln, es muß aber beachtet werden, daß für die Stromlinie $\Psi = 0$ die Gl. (21) durch die Beziehung

$$v = |v|\,e^{2\pi i} = |v|$$

ersetzt werden muß. Wählt man für die Veränderliche v einen Wert zwischen 1 und v_0, so kann man aus dem Ausdruck

$$x - x_E = \frac{a\,\alpha}{\pi(1-\lambda^2)}\left[\left(v_0 - \frac{\lambda^2}{v_0}\right)\left(\ln\frac{v_0 - |v|}{v_0 + |v|} - \ln\frac{v_0 - v_E}{v_0 + v_E}\right) + \left(\frac{1}{v_0} - \lambda^2 v_0\right)\left(\ln\frac{v_0|v| - 1}{v_0|v| + 1} - \ln\frac{v_0 v_E - 1}{v_0 v_E + 1}\right)\right.$$

$$\left. - 2(1-\lambda^2)\left(\ln\frac{|v| - 1}{|v| + 1} - \ln\frac{v_E - 1}{v_E + 1}\right)\right],$$

$$\left(\text{hierbei } v_E = \sqrt{\frac{v_E''}{2} + \sqrt{\frac{v''^2_E}{4} - 1}}, \quad v_E'' = \frac{6\,v_0'' + 4}{v_0'' + 6}\right)$$

die Abszisse jenes Punktes berechnen, in dem die Geschwindigkeit

$$u = \frac{k}{|v| - \dfrac{\lambda^2}{|v|}}$$

auftritt. Zur Bestimmung der Abszisse x_E wurde in Abb. 5 die Äquipotentiallinie EC auf folgende Weise konstruiert: In der v''-Ebene ist die entsprechende Kurve durch einen Kreisbogen dargestellt (Abb. 4). Die Koordinaten einzelner Punkte der Äquipotentiallinie EC in der v-Ebene kann man mit Hilfe der Beziehungen[3])

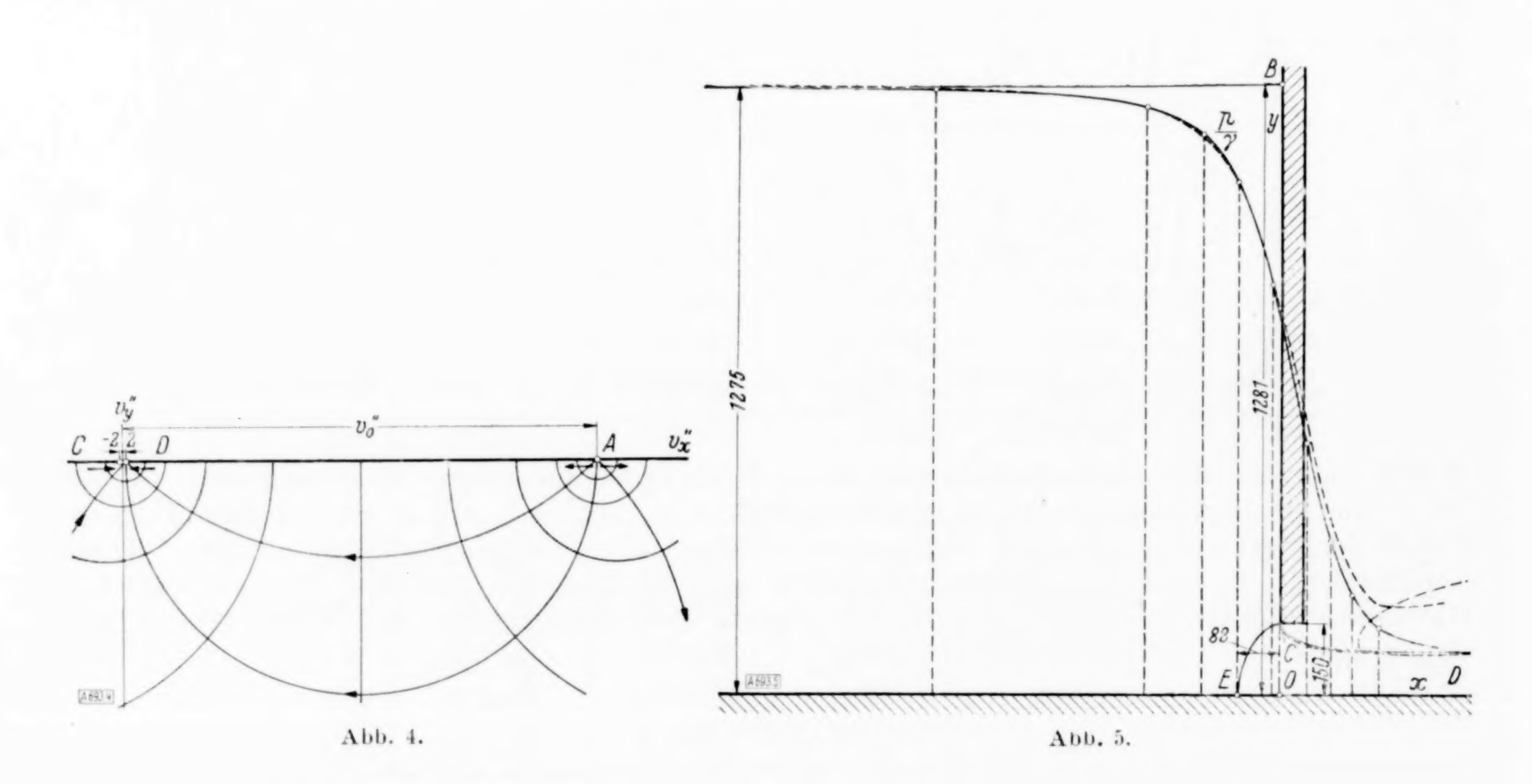


Abb. 4. Abb. 5.

$$|v| = \sqrt[4]{\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - 1}}\;\left(\text{hierbei } t = \frac{|v''|^2}{2} + \sqrt{\frac{|v''|^4}{4} - 2\,|v''|^2\cos 2\varphi'' + 4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

$$\cos 2\varphi = \pm\sqrt{\frac{|v''|^2 + 4}{8} - \sqrt{\left(\frac{|v''|^2 + 4}{8}\right)^2 - \frac{|v''|^2}{4}\cos^2\varphi''}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

(8) und (9) berechnen. Die Ermittlung der Äquipotentiallinie in der z-Ebene erfolgt durch graphische Auswertung der den Beziehungen (2), (3) analogen Integrale

$$x - x_0 = -\int_{\Psi_0}^{\Psi}\left(\frac{1}{u}\right)_y d\Psi = -\int_{\Psi_0}^{\Psi} v_y\, d\Psi,$$

[3]) Die Ausdrücke (24), (25) sind Wurzeln der Abbildungsgleichungen (10), (11).

$$y-y_0=\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\frac{1}{u}\right)_x d\Psi=\int_{\psi_0}^{\psi} v_x\, d\Psi .$$

Die Kurve P in Abb. 1 gibt den Gesamtdruck gegen die Stauwand (die Breite 1 m) bei verschiedenen Hubhöhen a und läßt sich aus dem Impulssatz bestimmen:

$$P=\gamma\left[\frac{h'^2}{2}-\frac{a^2\alpha'^2}{2}+\frac{Q'}{g}(u_0'-u_1')\right]=\gamma\left[h'\left(\frac{h'}{2}+\frac{u_0'^2}{g}\right)-a\alpha'\left(2h-\frac{3}{2}a\alpha'\right)\right].$$

Die mit Strich versehenen Größen beziehen sich auf eine strenge Lösung der Aufgabe (wenn man die Annahmen I und II nicht in Betracht zieht). Mit zulässiger Annäherung kann $\alpha'=\alpha$ gesetzt werden.

5. Vergleich der versuchsmäßigen und theoretischen Ergebnisse. Bei den Versuchen, welche einerseits im Kochschen Laboratorium [4], anderseits von Keutner [5], [6] durchgeführt wurden, stellte man fest, daß die Kontraktionszahl α unabhängig von der Größe der Druckhöhe h ist. Keutner gibt α als Funktion der Öffnungsweite a an.

Die theoretische Kontraktionszahl α, die nur vom Öffnungsverhältnis $\frac{a}{h}$ abhängt, bewegt sich zwischen 0·6036 und 0·6110 $\left(\text{wenn } \frac{a}{h} \text{ in den Grenzen } 0-0·6 \text{ liegt}\right)$; es ist bemerkenswert, daß sie durchschnittlich kleiner ist als die von Keutner gemessenen Einschnürungsverhältnisse α, aber größer als der von Carstanjen [4] angegebene Wert von $\alpha=0·60$ (für $a=0·18$ m, $h=1·2-1·8$ m). Eine Übereinstimmung mit dieser Zahl kann nach Umformung der Gl. (18) erreicht werden. Setzt man für die Geschwindigkeiten u_C, u_D die Werte

$$u_C=\varphi\sqrt{2g(h-a)}, \qquad u_D=\sqrt{2g(h-\alpha a)}$$

(der Geschwindigkeitsfaktor $\varphi<1$), welche mit den Keutnerschen Geschwindigkeitsmessungen übereinstimmen, so entsteht der Ausdruck

$$\lambda^2=\frac{\sqrt{1-\frac{\alpha a}{h}}-\varphi\sqrt{1-\frac{a}{h}}}{\sqrt{1-\frac{\alpha a}{h}}+\varphi\sqrt{1-\frac{a}{h}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18a).$$

Die Beziehungen (17) und (20) bleiben unverändert.

Für $\frac{a}{h}=0·12$, $\varphi=0·98$ kann das Einschnürungsverhältnis $\alpha=0·6016$ ermittelt werden. Es weicht also unbedeutend von 0·60 ab.

Das von Keutner [5] merklich höher beobachtete Einschnürungsverhältnis α bei kleinen Hubhöhen a läßt sich durch den Einfluß der Grenzschichtströmung an der Schütztafel und an der Sohle, sowie durch unvollkommene Abschärfung der Unterkante erklären. Bei größeren Öffnungsweiten a wurden starke Schwankungen des Wasserspiegels festgestellt.

Bei Vernachlässigung der Schwerewirkung [2] (die Geschwindigkeit längs der freien Strahlgrenze ist gleich konstant) nimmt α mit wachsendem Verhältnis $\frac{a}{h}$ rasch zu.

Ein Vergleich der theoretischen und der in dem Kochschen Laboratorium beobachteten[4]) ($h=1·2-1·8$ m) Absenkungskurve ist für $a=0·18$ m, $h=1·50$ m aus Abb. 6 ersichtlich.

[4]) In Abb. 5 bis 8 stellt die gestrichelte Linie die beobachtete Kurve dar.

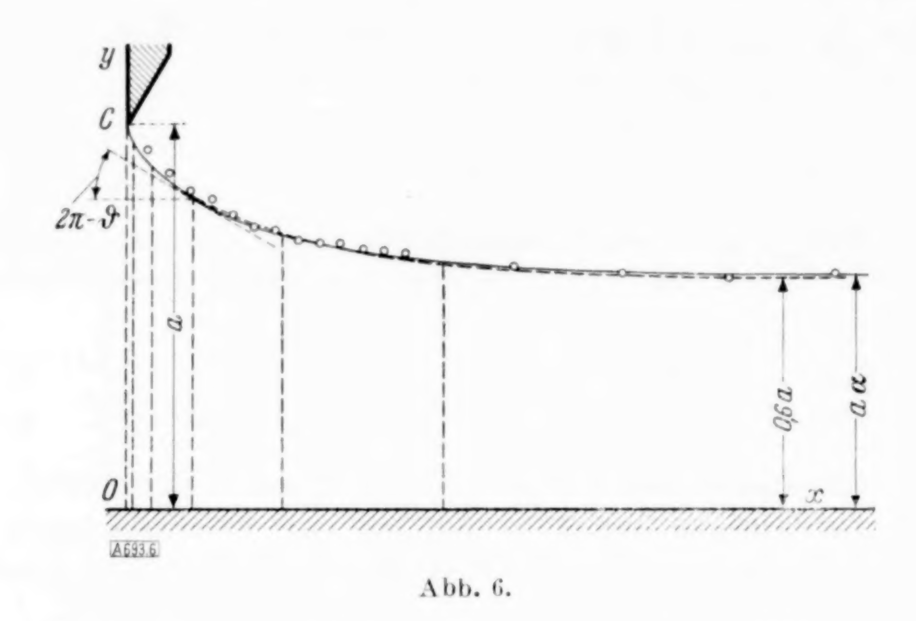


Abb. 6.

sichtlich. Keutner stellte für verschiedene Öffnungsweiten a Näherungsgleichungen für den an die scharfe Unterkante anschließenden Teil der Absenkungskurve auf [6]. In Abb. 7 sind

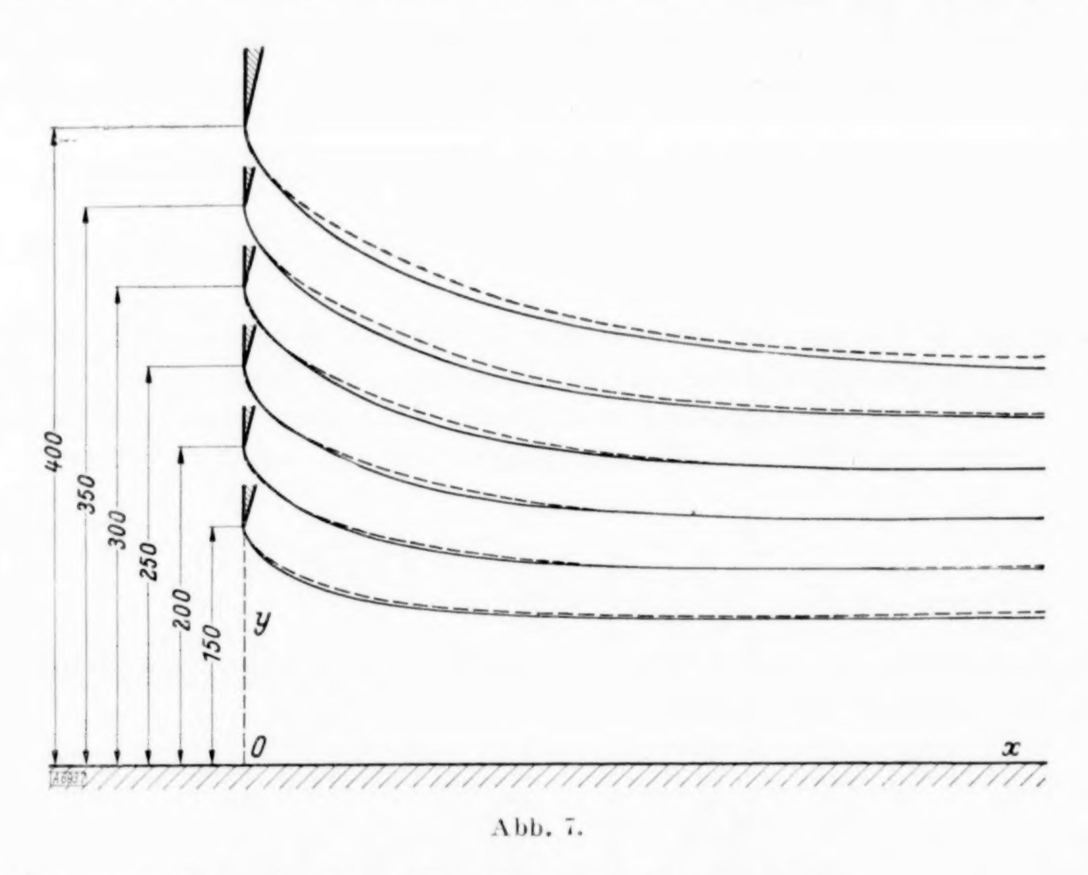


Abb. 7.

einige beobachteten und theoretischen Kurven gegenübergestellt.

Dagegen fällt die Zusammenstellung der theoretischen und der von Keutner [5] beobachteten Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt $\overline{OC}$ (Abb. 8) ungünstig aus. Die theo-

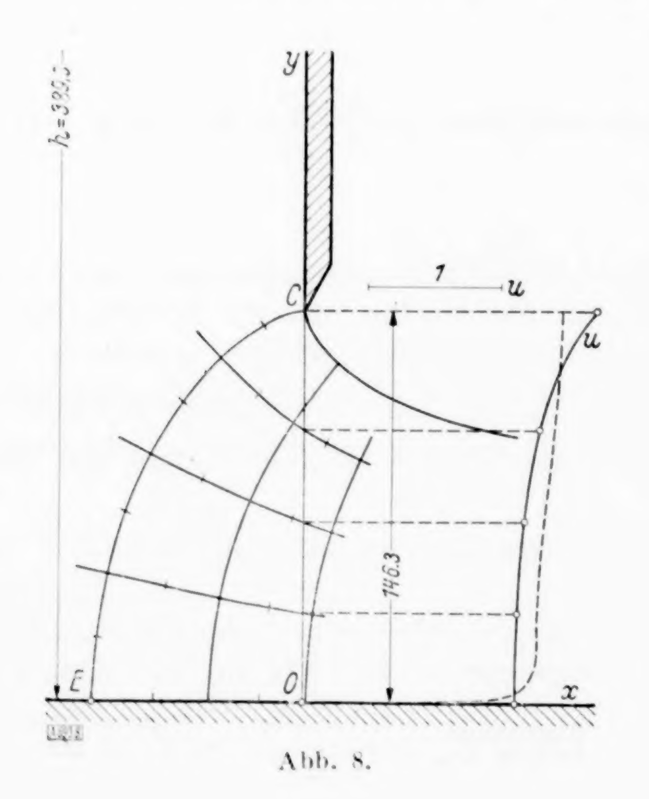


Abb. 8.

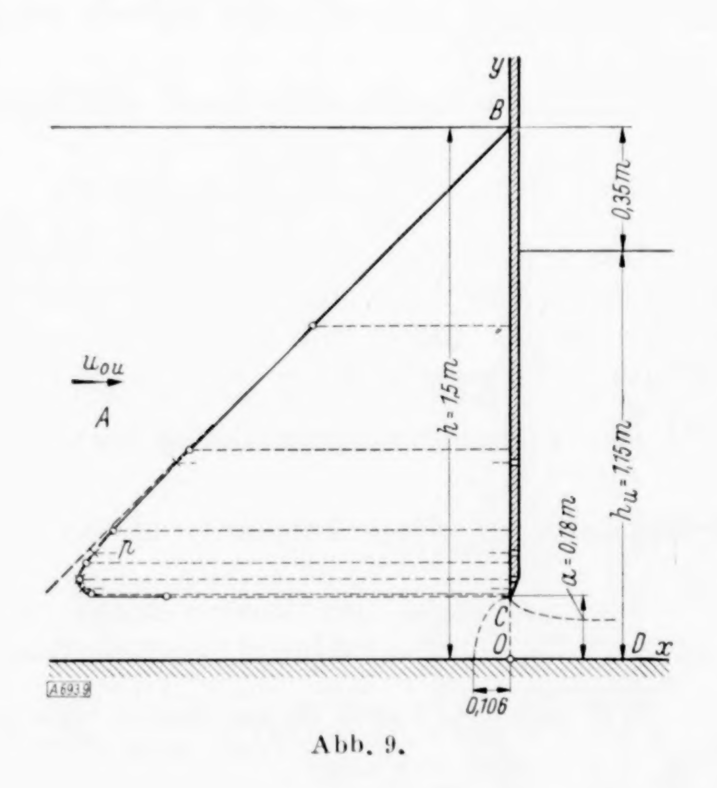


Abb. 9.

retische Kurve u wurde folgendermaßen konstruiert: Nach Ermittlung der Potentiallinie $\overline{EC}$ mit dem im vorigen Kapitel beschriebenen Verfahren wurden die Stromlinien $\Psi = \frac{Q}{4}, \frac{Q}{2}, \frac{3Q}{4}$ aus dem v-Plan durch graphische Integration der Gl. (2), (3) abgeleitet. Die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten dieser Stromlinien mit der y-Achse kann man aus dem v-Plan bestimmen. Zur Lösung wurden folgende Konstanten verwendet: $\frac{a}{h} = \frac{0{\cdot}1463}{0{\cdot}3893} = 0{\cdot}3758$, $\alpha = 0{\cdot}6040$, $\lambda^2 = 0{\cdot}053326$, $v_0 = 4{\cdot}18342$, $v_E = 2{\cdot}10163$, $u_E = 1{\cdot}1077$ m/sec, $u_C = 2{\cdot}1835$ m/sec.

Für $h = 1{\cdot}5$ m, $a = 0{\cdot}18$ m und eine Unterwasserhöhe von 1·15 m wurden im Kochschen Laboratorium [4] Druckmessungen vorgenommen (Abb. 9). Verkleinert man die Geschwindigkeitshöhen aus Zahlentafel 3 im Verhältnis

$$\frac{Q_u^2}{Q^2} = \frac{Q_u^2}{2\,g\,a^2\,\alpha^2\,(h - a\,\alpha)} = \left(\frac{0{\cdot}2909}{0{\cdot}5703}\right)^2 = 0{\cdot}2602$$

(Q_u stellt die beim Versuch gemessene Ausflußmenge dar, Q ist die theoretische Menge für $h = 1{\cdot}5$ m, $a = 0{\cdot}18$ m und eine Unterwasserhöhe $a\,\alpha$), so kann eine Druckkurve (Abb. 9) ermittelt werden, die sehr gut mit der versuchsmäßigen Linie übereinstimmt.

Abb. 5 stellt die theoretische und die im Kochschen [4] Laboratorium beobachtete Druckverteilung längs der Sohle dar. In der Zahlentafel 4 sind die berechneten Bodendrücke eingetragen.

Zahlentafel 4.

$$\frac{a}{h} = \frac{0{\cdot}150}{1{\cdot}281} = 0{\cdot}11710,\ \alpha = 0{\cdot}60662,\ \lambda^2 = 0{\cdot}012711,\ v_0 = 13{\cdot}8996.$$

$\frac{1}{\lvert v \rvert}$	0·1	0·2	0·3	$\frac{1}{v_E} = 0{\cdot}42$	0·5	0·6	0·8
$\frac{p}{\gamma}$ (m)	1·2694	1·2345	1·1764	1·0755	0·9892	0·8596	0·5264
$x - x_E$ (m)	—0·6385	— 0·1945	— 0·0744	0·0000	0·0347	0·07135	0·1441

$\frac{1}{\lvert v \rvert}$	0·9	0·95	0·98	1·0
$\frac{p}{\gamma}$ (m)	0·3228	0·2097	0·1393	0·0910
$x - x_E$ (m)	0·1947	0·2398	0·2966	∞

Im Oberwasser stimmt die versuchsmäßige Druckkurve mit der berechneten Linie überein, im Unterwasser liegt sie höher wegen der auftretenden Wirbelwalze.

Der nicht unbefriedigend ausfallende Vergleich der theoretischen und beobachteten Absenkungskurven und Druckkurven bestätigt, daß die Anwendung der Potentialtheorie zur Näherungslösung der vorliegenden Aufgabe berechtigt ist.

Schriftennachweis.

[1] A. Betz und E. Petersohn: Anwendung der Theorie der freien Strahlen. Ingenieur-Archiv 1932, S. 190.
[2] H. Mueller: Rechnerische Ermittlung der Strömungsvorgänge an scharfkantigen Planschützen. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 1935, S. 281.
[3] R. v. Mises: Berechnung von Ausfluß- und Überfallzahlen. Z. VDI Bd. 61 (1917), S. 447.
[4] A. Koch und M. Carstanjen: Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften. Berlin 1926.
[5] Ch. Keutner: Wasserabführungsvermögen von scharfkantigen und abgerundeten Planschützen. Die Bautechnik 1932, S. 266, 303.
[6] Ch. Keutner: Die Strömungsvorgänge an unterströmten Schützafeln mit scharfen und abgerundeten Unterkanten. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 1935, S. 5, 16.

Über die Kipp-Stabilität von Holm-Rippenrosten.

Von *Josef Weinhold* in Brünn.

1. Problemstellung. Es sei ein Holm-Rippenrost gebildet aus zwei Tragholmen 1 und 2 von der Länge l und einer beliebigen Zahl gleicher Rippen von der Länge $2h$. Die Rippenenden seien an die Holme in gleichen Abständen biegesteif angeschlossen. Im unbelasteten Zustand des Rostes sind die Mittellinien der Holme und Rippen Gerade, die in einer Ebene — der Rostebene — liegen und ein Rechtecknetz bilden. Der Querschnittsverlauf der Holme und Rippen sei unveränderlich. Als Querschnittsform der Holme ist die rechteckige oder eine solche ohne ausgeprägte Flanschwirkung vorausgesetzt. Die Steifigkeit der Holme sei B_1[1]) bzw. B_2, wenn die Verbiegung senkrecht zur Rostebene erfolgt, A_1 bzw. A_2, wenn die Verbiegung in der Rostebene stattfindet. Die Torsionssteifigkeiten seien C_1 bzw. C_2. In der gleichen Weise seien die Steifigkeiten einer der n gleichen Rippen mit B_r/n, A_r/n und C_r/n festgelegt. Wie in Abb. 1 ersichtlich, liegt der Ursprung des Kotensystemes $x_1\,y_1\,z_1$ bzw. $x_2\,y_2\,z_2$ im Mittelpunkt einer Endfläche des Holmes 1 bzw. 2, die Achsen x_1, x_2 fallen

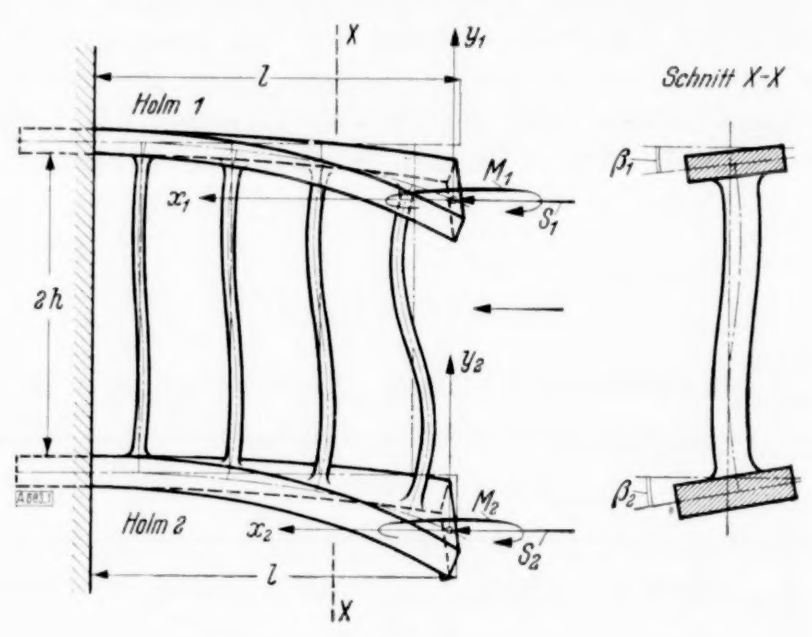


Abb. 1.

mit den Holmachsen im unbelasteten Zustand zusammen, die Achsen y_1, y_2 haben dann die Richtung der Rippenachsen und die Achsen z_1, z_2 weisen mit Bezug auf die Rostebene senkrecht nach oben. — Die äußere Belastung wird in einem Endquerschnitt der Holme eingeleitet und ist gegeben durch Biegemomente M_1 bzw. M_2 und Druckkräfte S_1 bzw. S_2. Während der Kippbewegung bleibt die Ebene der Biegemomente und die Richtung der Druckkräfte erhalten, wie es in Abb. 1 schematisch dargestellt ist.

Zur Behandlung des Problems werden die Kirchhoff-Clebschschen Gleichungen für das Gleichgewicht dünner Stäbe in der Loveschen Schreibweise [1] und in der nach Reissner [2] variierten Form verwendet. Hierbei gelten die mit einem Zeiger Null versehenen Größen für die ursprünglich stabile Form, von welcher aus der Verschiebungszustand variiert und die im folgenden als „statischer Fall" bezeichnet wird. Die entsprechenden Größen für den neuen Verschiebungszustand bleiben ohne Zeiger und ohne vorgesetztes Variationszeichen.

2. Allgemeine vereinfachende Annahmen. Um die Behandlung des Problems einfacher zu gestalten, werden drei Annahmen gemacht: a) Alle Verschiebungen sind sehr klein gegenüber den Längen l und h, insbesondere ist die Verschiebung durch die Hauptbiegung wegen $B > A$; $B > C$ sehr klein. Es kann infolgedessen die Bogenlänge s gleich x und mit Federhofer [3] die Krümmung der Querbiegung

$$\varkappa = \frac{d^2 y}{d x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

und der Drall

$$\tau = \frac{d \beta}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

[1]) Die Zeiger 1 bzw. 2 weisen auf den Holm 1 bzw. 2 hin, welchem die betreffende Größe zugeordnet ist. Sind die Zeiger 1, 2 weggelassen, dann bezieht sich die betreffende Größe auf beide Holme, wenn nichts anderes festgelegt wurde.

gesetzt werden (β ist der Kippwinkel). b) Die Rippensteifigkeiten werden gleichmäßig auf die Holmlänge l aufgeteilt. Die auf die Holmlänge eins bezogenen Rippensteifigkeiten sind also A_r/l, B_r/l, C_r/l. (Allfällige stärkere Endrippen können gesondert berücksichtigt werden.) c) Die Längsdehnung der Rippen ist sehr klein gegenüber der seitlichen Auslenkung der Anschlußpunkte während des Kippvorganges. Daraus folgt im Zusammenhang mit dem Obigen

$$y_1 = y_2 = y \quad \text{(3).}$$

3. Lösung für den Fall gleicher Holme und gleicher Momenten-Belastung. In diesem Fall gilt für die Krümmung der Hauptbiegung näherungsweise

$$\varkappa'_{01} = \varkappa'_{02} = \varkappa'_0 \quad \text{(4)}$$

mit

$$\varkappa'_0 = -\frac{M}{B} \quad \text{(5).}$$

Weiters ist ebenso

$$T_{01} = -S_1, \qquad T_{02} = -S_2 \quad \text{(6).}$$

Die Krümmung der Querbiegung des statischen Falles $\varkappa_0$, die Querkraft N_0' sowie der Drall τ_0 sind exakt Null. Die von der Hauptbiegung herrührende Querkraft N_0 kann nach Punkt 2a vernachlässigt werden. Aus dem gleichen Grunde können die Gl. (4) bis (6) angeschrieben werden. In diesem Falle sind also die Kenngrößen des statischen Falles sehr einfach, im Gegensatz zu allgemeineren Fällen[2]), wie sie z. B. in den Arbeiten über Rippenverbundwirkung [4] [5] vorkommen. — Die Differentialgleichung läßt sich durch Zusammenfassung der zweiten, der vierten und der sechsten der K.-Cl.-Gleichungen gewinnen. Zur Beschreibung der Rippenwirkung braucht also nur K, Θ_1 und Θ_2 eingeführt werden. Hierbei wird der Einfluß der Rippen auf die Hauptbiegung vernachlässigt. Die Berücksichtigung einer Art statischen Rippenverbundwirkung während des Kippvorganges scheint vorderhand aussichtslos zu sein. Faßt man eine Rippe als einen an den Enden frei aufliegenden Träger auf, so ergibt sich in einfacher Weise

$$K = -3\frac{A_r}{l\,h}\frac{d\,y}{d\,x} \quad \text{(7),}$$

$$\Theta_1 = -\frac{B_r}{l\,h}(2\,\beta_1 + \beta_2) \quad \text{(8a)}$$

und

$$\Theta_2 = -\frac{B_r}{l\,h}(2\,\beta_2 + \beta_1) \quad \text{(8b).}$$

Man erhält mit den Einführungen

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta \quad \text{(9)}$$

und

$$x = \xi\,l \quad \text{(10)}$$

---

[2]) In dem noch verhältnismäßig einfachen Falle, daß in den freien Endquerschnitten der Holme 1, 2 eines einseitig eingespannten Rostes Biegemomente M_1, M_2 wirken und B_r gleich Null gesetzt wird, wäre in die variierten K.-Cl.-Gleichungen z. B. für die Krümmung $\varkappa'_{01}$ des statischen Falles der schon verhältnismäßig komplizierende Ausdruck

$$\varkappa'_{01} = \mathfrak{C}_1\,(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2)\left(\mathfrak{Cof}\,\sqrt{\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2}\,x - \frac{\mathfrak{Sin}\,\sqrt{\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2}\,l}{\mathfrak{Cof}\,\sqrt{\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2}\,l}\,\mathfrak{Sin}\,\sqrt{\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2}\,x - 1\right) - \frac{M_1}{B_1}$$

einzuführen. Hierin bedeutet

$$\mathfrak{c}_1 = \frac{C_r}{2\,B_1\,h\,l}, \qquad \mathfrak{c}_2 = \frac{C_r}{2\,B_2\,h\,l} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{C}_1 = \frac{\mathfrak{c}_1}{(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2)^2}\left(\frac{M_2}{B_2} - \frac{M_1}{B_1}\right).$$

schließlich als Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \beta}{d \xi^4} + (v - w) \frac{d^2 \beta}{d \xi^2} - u \beta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Hierin bedeutet

$$v = \frac{M^2 l^2}{A C}\left(1 - \frac{A}{B}\right)\left(1 - \frac{C}{B}\right) + \frac{(S_1 + S_2) l^2}{2 A} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

$$w = 3 \frac{l}{h}\left(\frac{A_r}{A} + \frac{B_r}{C}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und

$$u = 3 \frac{B_r l}{C h}\left(\frac{(S_1 + S_2) l^2}{2 A} - 3 \frac{A_r l}{A h}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (12) lautet mit den vier Integrationskonstanten $\mathfrak{C}_1 \ldots . \mathfrak{C}_4$

$$\beta = \mathfrak{C}_1 \,\mathfrak{Sin}\, \nu_1 \xi + \mathfrak{C}_2 \,\mathfrak{Cos}\, \nu_1 \xi + \mathfrak{C}_3 \sin \nu_2 \xi + \mathfrak{C}_4 \cos \nu_2 \xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

wenn man

$$\nu_1 = \sqrt{-\frac{v - w}{2} + \sqrt{\left(\frac{v - w}{2}\right)^2 + u}} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{v - w}{2} + \sqrt{\left(\frac{v - w}{2}\right)^2 + u}} \quad \ldots \quad (16)$$

setzt. — Im Folgenden wird vorderhand die numerische Lösung für die Grenzbedingungen

$$\beta(\xi = 0) = \beta(\xi = 1) = \frac{d^2 \beta}{d \xi^2}(\xi = 0) = \frac{d^2 \beta}{d \xi^2}(\xi = 1) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

angegeben. Diese treffen zu, wenn die Mittelpunkte der Holmendquerschnitte in der Rostebene unterstützt sind und durch Parallelführungen am Umkippen verhindert werden. Die Kippbedingung lautet

$$\sin \nu_2 = 0, \qquad \text{oder} \qquad u + (v - w)(n \pi)^2 = (n \pi)^4, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

[6] [7]. Zum Zwecke einer einfacheren Rechnung wird noch eingeführt

$$\mathfrak{m} = \frac{M^2 l^2}{A C}\left(1 - \frac{A}{B}\right)\left(1 - \frac{C}{B}\right), \quad \mathfrak{s} = \frac{(S_1 + S_2) l^2}{2 A}, \quad \mathfrak{a} = \frac{l}{h} \frac{A_r}{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \frac{l}{h} \frac{B_r}{C} \quad . \quad (19),$$

weiters

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}\, \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = (n \pi)^2 + 3(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \frac{9 \mathfrak{a} \mathfrak{b}}{(n \pi)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Damit ergibt sich die Belastung an der Stabilitätsgrenze in der Form

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{s} = \mathfrak{p} \frac{\mathfrak{c} + 1}{\mathfrak{c} + 1 + 3 \mathfrak{b}/(n \pi)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Die beiden Faktoren in Gl. (21) sind für die Ausbiegung mit einer Halbwelle ($n = 1$) in der Tabelle 1 und 2 für eine Reihe von Werten $\mathfrak{b}/\pi^2$, $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ ziffernmäßig angegeben. Diese Stabilitätsgrenze ist maßgebend bis zu einem Wert $\mathfrak{b}/\pi^2 = 40$ bei $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \geqq 100$ bis $\mathfrak{c} \leqq 9{,}817$, bei $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \geqq 1$ bis $\mathfrak{c} \leqq 1{,}042$, also wenn $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ groß ist und wenn die Druckbeanspruchung überwiegt. Die Lastgrenze nach Gl. (21) kann auch als Kenngröße bei der Behandlung von Tragflügelschwingungen herangezogen werden, wenn es sich um Schwingungen von Holmen zwischen zwei Abstützungen

Tabelle 1. Werte von $\mathfrak{p}/\pi^2$.

$\frac{\mathfrak{b}}{\pi^2}$	$\mathfrak{b}/\mathfrak{a}=$ 100	50	10	2	1	0,6	0,4
0	1	1	1	1	1	1	1
0,2	1,61	1,62	1,70	2,08	2,56	3,2	4
1,0	4,12	4,24	5,20	10	16	24	34
2,0	7,42	7,84	11,20	28	49	77	112
4,0	14,56	16,12	28,6	91	169	273	403
8,0	31,00	37,00	85,0	325	625	1025	1525
12,0	50,32	63,64	170,2	703	1369	2257	3367
16,0	72,52	96,04	284,2	1225	2401	3969	5929
20,0	97,60	134,20	427,0	1891	3721	6161	9211
30,0	172,90	254,80	910,0	4096	8281	13741	20566
40,0	266,20	411,40	1573,0	7381	14641	24321	36421

Tabelle 2. Werte von $(\mathfrak{c}+1):\left(\mathfrak{c}+1+3\,\frac{\mathfrak{b}}{\pi^2}\right)$.

$\frac{\mathfrak{b}}{\pi^2}$	$\mathfrak{c}=\mathfrak{m}/\mathfrak{s}=$ 0	0,5	1	5	10	100	∞
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,625	0,714	0,769	0,909	0,948	0,994	·
1,0	0,250	0,333	0,400	0,667	0,786	0,971	·
2,0	0,143	0,200	0,250	0,500	0,647	0,944	·
4,0	0,0769	0,111	0,143	0,333	0,478	0,894	·
8,0	0,0400	0,0588	0,0769	0,200	0,314	0,808	·
12,0	0,0270	0,0400	0,0526	0,143	0,234	0,737	·
16,0	0,0204	0,0303	0,0400	0,111	0,186	0,678	·
20,0	0,0164	0,0244	0,0323	0,0909	0,155	0,627	·
30,0	0,0110	0,0164	0,0217	0,0625	0,109	0,529	·
40,0	0,00826	0,0124	0,0164	0,0476	0,0840	0,457	1,000

handelt. (Innenfeld eines abgestrebten Eindeckers, bei Doppeldeckern die Felder zwischen den Streben und die an den Rumpf anschließenden.) Der Einfluß einer allfälligen elastischen Einspannung der Trägerenden kann vorderhand abgeschätzt werden [8].

4. Lösung für den Sonderfall $Z=K'=\Theta=0$. Hier ist also angenommen, daß durch entsprechende Gelenke in den Rippenanschlüssen alle Kräfte und Momente ausgeschaltet sind, die nicht in der Rostebene wirken. Es kommen demnach nur zur Wirkung X, Y und K. Für den statischen Fall besteht hier keinerlei gegenseitige Beeinflussung der Holmbiegung. — Als Differentialgleichung dieses Falles erhält man in ähnlicher Weise wie im vorigen Punkt

$$\frac{d^4 y}{d x^4}+\lambda^2\frac{d^2 y}{d x^2}=0 \qquad (22).$$

Hierin bedeutet mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{m}&=\frac{l^2}{A_1+A_2}\left\{\frac{M_1^2}{C_1}\left(1-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(1-\frac{C_1}{B_1}\right)+\frac{M_2^2}{C_2}\left(1-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(1-\frac{C_2}{B_2}\right)\right\},\\ \mathfrak{s}&=\frac{(S_1+S_2)\,l^2}{A_1+A_2},\qquad \mathfrak{b}=\frac{2\,A_r\,l}{(A_1+A_2)\,h}\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

und

$$\lambda^2 l^2=\mathfrak{m}+\mathfrak{s}-3\,\mathfrak{b} \qquad (24).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (22)

$$y = \mathfrak{c}_1 \cos \lambda x + \mathfrak{c}_2 \sin \lambda x + \mathfrak{c}_3 x + \mathfrak{c}_4 \quad \text{(25)}$$

führt im Verein mit den Beziehungen

$$C_1 \frac{d^2 \beta_1}{d x^2} - M_1 \left(1 - \frac{A_1}{B_1}\right) \frac{d^2 y}{d x^2} = 0 \quad \text{und} \quad C_2 \frac{d^2 \beta_2}{d x^2} - M_2 \left(1 - \frac{A_2}{B_2}\right) \frac{d^2 y}{d x^2} = 0 \quad \text{(26)},$$

welche man aus der sechsten der K.-Cl.-Gleichungen erhält, auf die Ausdrücke für die Kippwinkel,

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{M_1}{C_1}\left(1 - \frac{A_1}{B_1}\right)\{\mathfrak{c}_1 \cos \lambda x + \mathfrak{c}_2 \sin \lambda x + \mathfrak{c}_5 x + \mathfrak{c}_6\} \\ \text{und} \quad \beta_2 &= \frac{M_2}{C_2}\left(1 - \frac{A_2}{B_2}\right)\{\mathfrak{c}_1 \cos \lambda x + \mathfrak{c}_2 \sin \lambda x + \mathfrak{c}_7 x + \mathfrak{c}_8\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(27)}.$$

Im folgenden ist für fünf verschiedene Befestigungsmöglichkeiten der Trägerenden die Kippbedingung und der daraus gefolgerte Zusammenhang der Größen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{b}$ an der tiefsten Stabilitätsgrenze angegeben. Durch die Spezialisierung $\mathfrak{m} = 0$ und $\mathfrak{b} = 0$ erhält man die Parameterwerte der Standardknickfälle.

Fall I. Die Träger sind an einem Ende fest eingeklemmt, am anderen Ende frei. Die Grenzbedingungen lauten

$$\left.\begin{aligned} & y = 0, \quad \frac{d^2 y}{d x^2}(A_1 + A_2) + M_1\left(1 - \frac{C_1}{B_1}\right)\beta_1 + M_2\left(1 - \frac{C_2}{B_2}\right)\beta_2 = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \\ \text{und} \quad & \frac{d y}{d x} = \frac{d^3 y}{d x^3} = \beta_1 = \beta_2 = \frac{d \beta_1}{d x} = \frac{d \beta_2}{d x} = 0 \quad \text{für} \quad x = l \end{aligned}\right\} \quad \text{(28)}.$$

Es ergibt sich

$$\zeta = \frac{\cos \lambda l}{\cos \lambda l - 1} \quad \text{(29)}$$

mit

$$\zeta = \frac{\mathfrak{m}}{\lambda^2 l^2} \quad \text{(30)}.$$

Wirkt M_1 und M_2 allein, dann müßte $\zeta \geq 1$ sein, was nach Gl. (29) unmöglich ist. Kippen tritt also nicht ein. Diesen Fall hat bereits Lorenz [9] behandelt. Bleibt während der Kippbewegung der Vektor M wohl parallel zur $x\,y$-Ebene, sonst aber entgegen den Annahmen unter Punkt 1 senkrecht zur Trägerachse, dann ist nach Föppl und Karas [10], [11] $\lambda l = \pi/2$. Die Auswertung der Kippbedingung, Gl. (29), ist in der Tabelle 3 angegeben.

Tabelle 3.

λl	(0)	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{11}{16}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
	(0)	1,571	1,963	2,160	2,356	2,749	3,142
ζ	$(\pm\infty)$	0,000	0,278	0,358	0,414	0,480	0,500
$\mathfrak{m}$		0,000	1,071	1,670	2,298	3,627	4,936
$\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{b}$		2,468	2,782	2,996	3,253	3,930	4,936

Die eingeklammerten Werte $\lambda l = 0$ und $\zeta = \pm\infty$ entsprechen keinen von Null verschiedenen Auslenkungen.

Fall II, III und IV. Sind die Träger an beiden Enden in Parallelführungen gehalten, — an einem Ende in Parallelführungen gehalten und am anderen Ende fest eingeklemmt, — an beiden Enden fest eingeklemmt, dann ergeben sich der Reihe nach die bekannten Bedingungen $\sin \lambda l = 0$, $\lambda l = \operatorname{tg} \lambda l$, $\cos \lambda l = 1$, denen als Parameterwerte der Reihe nach π^2, $4{,}49^2$, $4\pi^2$ zugeordnet sind.

Fall V. Die Träger sind am linken Ende fest eingeklemmt und am rechten Ende in Parallelführungen gehalten. Außerdem sind die Enden rechts durch eine starke Endrippe mit der Biegungssteifigkeit A_r' verbunden, die Biegungsmomente in der xy-Ebene überträgt. Die Grenzbedingungen lauten demnach:

$$\left.\begin{aligned} y = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \frac{d^2 y}{d x^2}(A_1 + A_2) = \frac{d y}{d x} 6 \frac{A_r'}{h} \quad & \text{für} \quad x = 0 \\ y = \frac{d y}{d x} = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad & \text{für} \quad x = l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Man erhält als Kippbedingung

$$\lambda l = \operatorname{tg} \lambda l (1 - 1/\eta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

mit

$$\eta = \frac{h}{l} \frac{A_1 + A_2}{6 A_r'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33).$$

Zusammengehörende Werte λl und η enthält die Tabelle 4.

Tabelle 4.

η	∞	10	1	0,5	0,2	0,1	0,02	0,01	0
λl	4,49	4,52	4,71	5,23	5,54	5,80	6,15	6,22	6,28

5. Schlußbemerkung. Die in den Punkten 3 und 4 mitgeteilten Ergebnisse gehören zu Vorarbeiten für allgemeinere Untersuchungen der Kippstabilität eines Holm-Rippenrostes, welche bisher in der technischen Literatur noch fehlen. Das Ziel dieser Untersuchungen ist die Bestimmung der Kipplasten für praktisch vorkommende Steifigkeitsverhältnisse und Belastungsarten. Es wird auch vermutet, daß gewisse Tragflügelschwingungen auf eine zu starke Annäherung an die hier in Betracht gezogene Stabilitätsgrenze zurückzuführen sind. 683

Schrifttum.

[1] Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität.
[2] H. Reissner: Über die Stabilität der Biegung. Sitz.-Ber. der Berliner Math. Ges. 1904, III. Jhg.
[3] Federhofer: Neue Beiträge zur Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe. Sitz.-Ber. der Akad. der Wiss. in Wien. Math.-Naturwiss. Klasse, Abt. IIa, 140. Bd. 1931.
[4] H. Reissner: Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik. ZFM 1926.
[5] Thalau: Über die Verbundwirkung von Rippen im freitragenden, zweiholmigen und verspannungslosen Flugzeugflügel. ZFM 1925.
[6] Grammel: Kritische Drehzahlen und Kreiselwirkung. Zschr. des VDI 1920.
[7] Karas: Kritische Drehzahlen stetig mit Masse belegter Wellen mit Längsbelastung und Kreiselwirkung. Ing.-Archiv Bd. I, 1930.
[8] der Verfasser: Zur Stabilität eines auf Druck und Biegung beanspruchten, an den Enden elastisch eingespannten Trägers. Mitt. des Hauptvereins Deutscher Ingenieure i. d. ČSR, Jhg. 1934.
[9] Lorenz: Lehrbuch der Techn. Physik, Bd. IV.
[10] A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. II.
[11] Karas: Vorlesungen über Stabilitätsprobleme, gehalten a. d. DTH, Brünn 1926/27.

Über einige ebene Randwertprobleme der Elastizitätstheorie.

Von *E. Weinel* in Jena.

In einer Abhandlung „Beiträge zur Anwendung der Inversionsmethode bei Behandlung von ebenen Problemen der Elastizitätstheorie" hat W. Olszak[1]) eine Reihe von Randwertaufgaben mit Hilfe der Abbildung durch reziproke Radien durchgeführt; es handelt sich dabei naturgemäß um Bereiche, die von zwei Kreisen begrenzt sind, z. B. exzentrische Ringe und doppelt gelochte Scheiben.

Bereits im Jahre 1921 hat Th. Pöschl[2]) darauf aufmerksam gemacht, daß gegenüber dem Inversionsverfahren die Methode der krummlinigen Koordinaten — als solche kommen hier bipolare Koordinaten in Betracht — gewisse Vorzüge besitzt. Durch einige Mißerfolge scheint dieser von Pöschl eingeschlagene Weg unverdient in Mißkredit geraten zu sein. Ich möchte daher eine Reihe von Aufgaben nach dieser Methode durchführen, um zu zeigen, daß die Verwendung angepaßter Koordinaten bei richtiger Handhabung zu sehr übersichtlichen Ausdrücken führt, die auch numerisch besser auswertbar sind als die etwas schwerfälligen Formeln der Inversionsmethode. Zugleich werden aber auch einige Probleme, für die das Inversionsverfahren anscheinend nicht zum Ziel führt, in voller Allgemeinheit lösbar. Hierher gehört z. B. das bereits von Pöschl a. a. O. in Angriff genommene Problem der doppelt gelochten Scheibe unter einseitigem Zug.

Erster Teil. Der ebene Spannungszustand in bipolaren Koordinaten.

1. Zur Geometrie der bipolaren Koordinaten. Die bipolaren Koordinaten λ, φ sind mit den kartesischen x, y verknüpft durch die Beziehung

$$x + i\,y = a \coth \frac{1}{2}(\lambda + i\,\varphi); \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda - \cos \varphi} \\ y &= -a \frac{\sin \varphi}{\cosh \lambda - \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Den Koordinatenlinien $\lambda = \text{const}$ entspricht die Kreisschar

$$(x - a \coth \lambda)^2 + y^2 = a^2 / \sinh^2 \lambda .$$

Die Linien $\varphi = \text{const}$ bilden das dazu orthogonale Kreisbüschel durch die Punkte $x \pm a$. (Abb. 1.)

Durch geeignete Wahl der Maßstabszahl a kann jedes von zwei sich nicht schneidenden Kreisen begrenztes Gebiet in dieses System von Koordinatenlinien so eingepaßt werden, daß die kreisförmigen Ränder von zwei Koordinatenlinien $\lambda = \lambda_0$ und $\lambda = \lambda_1$ gebildet werden.

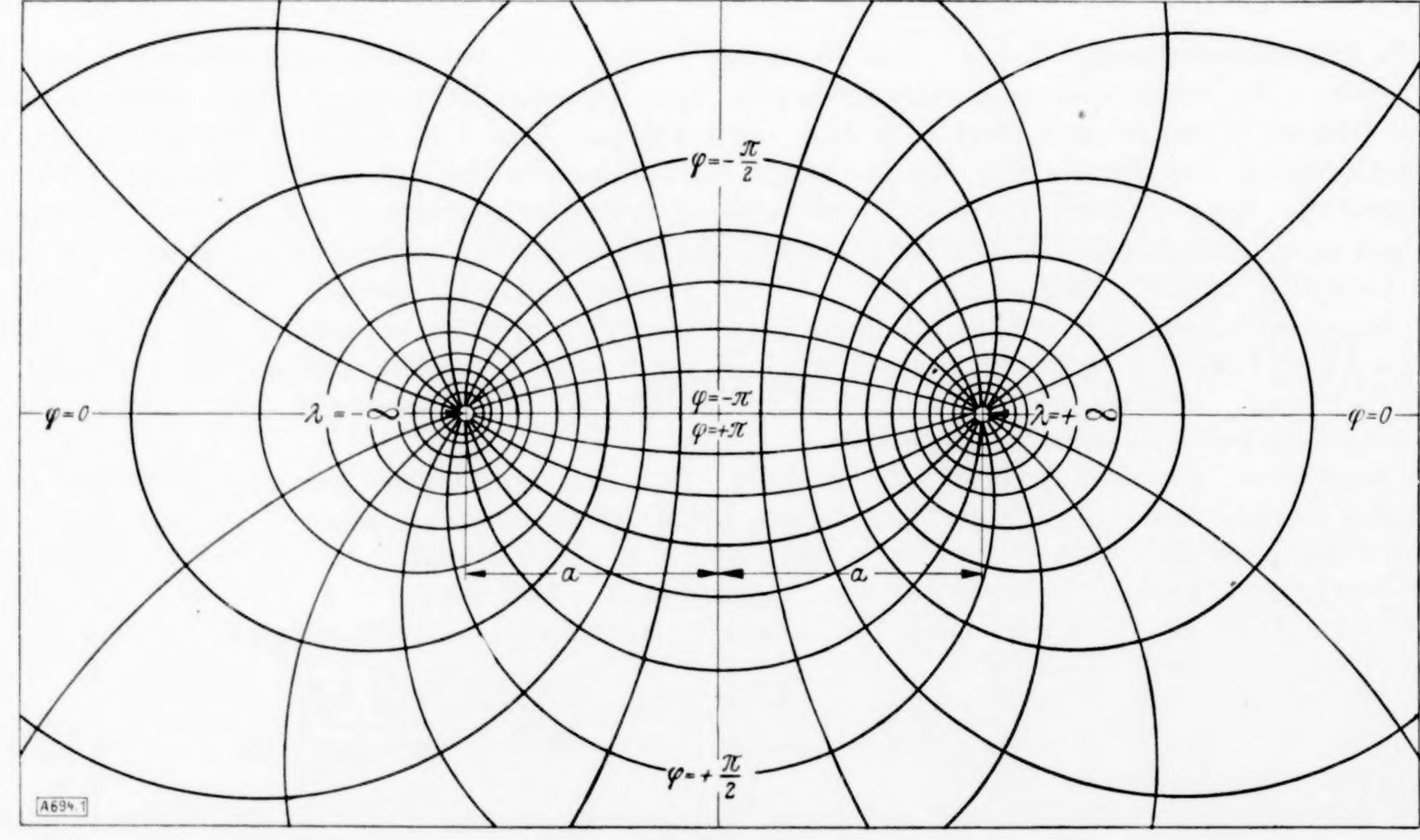


Abb. 1. Bipolare Koordinaten.

[1]) Ing. Archiv Bd. VI (1935), Seite 402 bis 418.

[2]) Th. Pöschl: Über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einer gezogenen Scheibe. ZAMM, Bd. 1 (1921), S. 174 und Bd. 2 (1922), S. 187.

Im einzelnen hat man zu setzen (Abb. 2):

a) für den exzentrischen Kreisring $(e < r_1 - r_0)$; $(\lambda_0 \cdot \lambda_1 > 0)$

$$4\,(a\,e)^2 = (r_1 + r_0 + e)(r_1 + r_0 - e)(r_1 - r_0 + e)(r_1 - r_0 - e) \quad \ldots \ldots \quad (2a)$$

$$\lambda_0 = \operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{r_0}\right); \qquad \lambda_1 = \operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{r_1}\right);$$

b) für die doppelt gelochte Scheibe $(e > r_1 + r_0)$; $(\lambda_0\,\lambda_1 < 0)$

$$4\,(a\,e)^2 = (e + r_1 + r_0)(e + r_1 - r_0)(e - r_1 + r_0)(e - r_1 - r_0) \quad \ldots \ldots \quad (2b)$$

$$\lambda_0 = +\operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{r_0}\right); \qquad \lambda_1 = -\operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{r_1}\right).$$

c) Im Sonderfall der gelochten Halbseite $(r_1 = \infty)$; $(\lambda_0 \cdot \lambda_1 = 0)$

$$a^2 = e^2 - r_0^2;$$

$$\lambda_0 = \operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{r_0}\right); \quad \lambda_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2c).$$

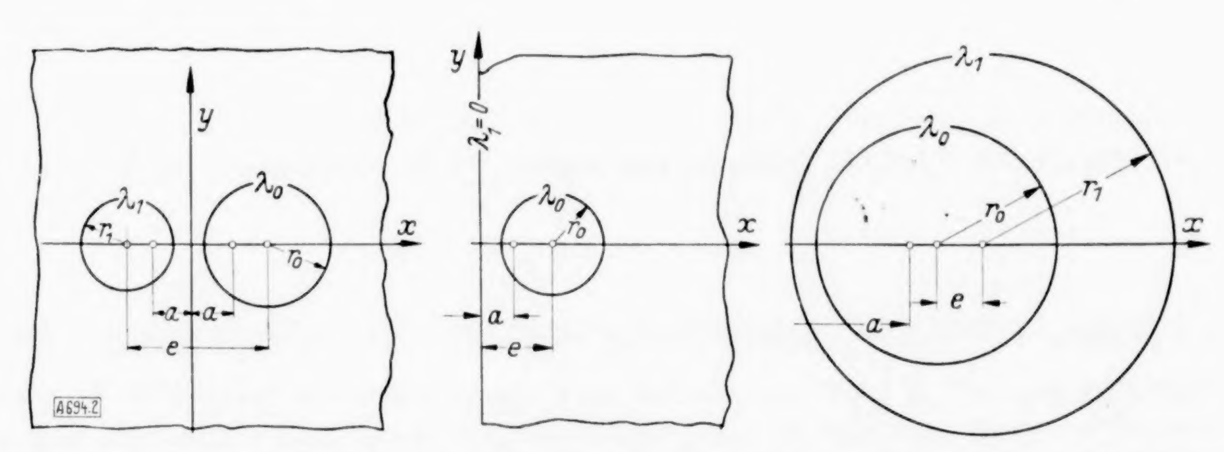


Abb. 2. Von zwei Kreisen begrenzte Bereiche: gelochte Scheiben und exzentrischer Ring.

2. Die Airysche Spannungsfunktion in bipolaren Koordinaten. Der Spannungszustand in der Scheibe ist gekennzeichnet durch seine Airysche Spannungsfunktion $F = F(\lambda, \varphi)$, wobei F der Differentialgleichung

$$\nabla^4 F = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

genügt.

Die Komponenten des Spannungstensors stellen sich in bipolaren Koordinaten wie folgt dar:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\lambda &= \frac{[\cosh\lambda - \cos\varphi]^2}{a^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{y}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \left(\frac{x}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right] \\
\sigma_\varphi &= \frac{[\cosh\lambda - \cos\varphi]^2}{a^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} + \left(\frac{y}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\varphi} + \left(\frac{x}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right] \\
\tau_{\lambda\varphi} &= -\frac{[\cosh\lambda - \cos\varphi]^2}{a^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\,\partial\varphi} - \left(\frac{y}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\lambda} + \left(\frac{x}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Enthält die Scheibe den unendlich fernen Punkt $(\lambda = 0;\ \varphi = 0)$, so trennen wir aus der Spannungsfunktion F jenen Anteil $F_0(\lambda, \varphi)$ ab, der im Unendlichen nicht regulär ist. Enthält der Spannungszustand außerdem noch singuläre Lastangriffe (Einzelkräfte, Einzelmomente), so werden diese Singularitäten abgespaltet und zu dem Anteil $F_0(\lambda, \varphi)$ hinzugenommen.

In der Spannungsfunktion

$$F(\lambda, \varphi) = F_0(\lambda, \varphi) - F_1(\lambda, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist dann $F_1(\lambda, \varphi)$ eine im ganzen Bereich $(\lambda_0 < \lambda < \lambda_1)$ reguläre Spannungsfunktion, die zudem in φ periodisch mit der Periode 2π ist. Wir können $F_1(\lambda, \varphi)$ in der bekannten Weise aus Potentialen $\psi_1(\lambda, \varphi)$, $\psi_2(\lambda, \varphi)$ aufbauen:

$$F_1(\lambda, \varphi) = (x^2 + y^2)\,\psi_1(\lambda, \varphi) + \psi_2(\lambda, \varphi).$$

Wegen der Periodizität in φ läßt sich jedes dieser Potentiale ψ als Fourierentwicklung

$$\psi(\lambda, \varphi) = (a_0 + b_0 \lambda) + \sum_1^\infty (a_n \cosh n\lambda + b_n \sinh n\lambda) \cos n\varphi$$
$$+ \sum_1^\infty (\bar{a}_n \cosh n\lambda + \bar{b}_n \sinh n\lambda) \sin n\varphi$$

ansetzen. Unter Berücksichtigung von

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{\cosh\lambda + \cos\varphi}{\cosh\lambda - \cos\varphi}$$

kann dann $F_1(\lambda, \varphi)$ auf die Form gebracht werden:

$$F_1(\lambda, \varphi) = a^2 \frac{f_1(\lambda, \varphi)}{\cosh\lambda - \cos\varphi}$$

mit

$$f_1(\lambda, \varphi) = L_0(\lambda) + \sum_1^\infty L_n(\lambda) \cos n\varphi + \sum_1^\infty \bar{L}_n(\lambda) \sin n\varphi,$$

wobei:

$$L_0(\lambda) = A'_0 \cosh\lambda + B'_0 \lambda \sinh\lambda + C'_0 \sinh\lambda + D'_0 \lambda \cosh\lambda$$
$$L_1(\lambda) = A'_1 \cosh 2\lambda + B'_1 + C'_1 \sinh 2\lambda + D'_1 \lambda$$
$$L_n(\lambda) = A'_n \cosh\overline{n+1}\,\lambda + B'_n \cosh\overline{n-1}\,\lambda + C'_n \sinh\overline{n+1}\,\lambda + D'_n \sinh\overline{n-1}\,\lambda;\ (n \geq 1).$$

Für die $\bar{L}_i(\lambda)$ bestehen die gleichen Ausdrücke nur mit andern Koeffizienten $\bar{A}'_i, \bar{B}'_i, \bar{C}'_i, \bar{D}'_i$.

Schreibt man nun der Symmetrie halber auch den Anteil $F_0(\lambda, \varphi)$ in der Form

$$F_0(\lambda, \varphi) = a^2 \frac{f_0(\lambda, \varphi)}{\cosh\lambda - \cos\varphi},$$

so tritt an Stelle der Airyschen Spannungsfunktion $F(\lambda, \varphi)$ die neue selbständige Funktion

$$f(\lambda, \varphi) = f_0(\lambda, \varphi) - f_1(\lambda, \varphi) \quad \ldots \quad (6).$$

Mit $f(\lambda, \varphi)$ berechnen sich die Spannungskomponenten folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\lambda(\lambda, \varphi) &= \left\{(\cosh\lambda - \cos\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - \sinh\lambda \frac{\partial f}{\partial\lambda} - \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \cosh\lambda f(\lambda, \varphi)\right\} \\
\sigma_\varphi(\lambda, \varphi) &= \left\{(\cosh\lambda - \cos\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} - \sinh\lambda \frac{\partial f}{\partial\lambda} - \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \cos\varphi f(\lambda, \varphi)\right\} \\
\tau_{\lambda\varphi}(\lambda, \varphi) &= -\left\{(\cosh\lambda - \cos\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\varphi}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Für die Formulierung der Randwertaufgaben ist es nun zweckmäßig, neben der Koordinate λ auch die in λ lineare Variable μ

$$\mu = \lambda - \mu_0; \quad \mu_0 = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}; \quad \mu_1 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{2}$$

einzuführen; man erreicht dadurch, daß die Ränder $\lambda = \lambda_0$, $\lambda = \lambda_1$ durch die Koordinatenlinie $\mu = \pm \mu_1$ gebildet werden. Bei Verwendung von μ erhält $f_1(\lambda, \varphi)$ die Gestalt

$$f_1(\lambda, \varphi) = M_0(\mu) + \sum_1^\infty{}' M_n(\mu) \cos n\varphi + \sum_1^\infty{}' \overline{M}_n(\mu) \sin n\varphi \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

$$\left.\begin{aligned} M_0(\mu) &= A_0 \cosh \mu + B_0 \mu \sinh \mu + C_0 \sinh \mu + D_0 \mu \cosh \mu \\ M_1(\mu) &= A_1 \cosh 2\mu + B_1 + C_1 \sinh 2\mu + D_1 \mu \\ M_n(\mu) &= A_n \cosh(n+1)\mu + B_n \cosh(n-1)\mu + C_n \sinh(n+1)\mu + D_n \sinh(n-1)\mu; \, (n \geqq 2) \end{aligned}\right\} (8a).$$

Die $\overline{M}_1(\mu)$ $(n \geqq 1)$ unterscheiden sich hiervon nur durch andere Koeffizienten $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$, $\bar{C}_n$, $\bar{D}_n$.

Man bemerkt, daß man über die Koeffizientenaggregate

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= (A_0 \cosh \mu_0 + B_0 \mu_0 \sinh \mu_0 - C_0 \sinh \mu_0 - D_0 \mu_0 \cosh \mu_0) \\ &\quad - (A_1 \cosh 2\mu_0 + B_1 - C_1 \sinh 2\mu_0 - D_1 \mu_0) \\ \omega_1 &= (A_0 \sinh \mu_0 + B_0 \mu_0 \cosh \mu_0 - C_0 \cosh \mu_0 - D_0 \mu_0 \sinh \mu_0) \\ \omega_2 &= (\bar{B}_1 - \bar{D}_1 \mu_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

noch völlig willkürlich verfügen kann, ohne daß dadurch der Spannungstensor geändert wird. Es hängt dies damit zusammen, daß in dem allgemeinen Ansatz für F_1 die lineare Funktion

$$(a^2/2)\,\omega_0 + \omega_1 a x + \omega_2 a y$$

enthalten ist, die bekanntlich auf den Spannungstensor keinen Einfluß nimmt.

Ferner ist folgendes zu bemerken. Der Anteil F_0 bzw. f_0 war so gewählt worden, daß durch ihn das Verhalten des Spannungszustands im Unendlichen dargestellt wird. Demnach müssen die zu $f_1(\lambda, \varphi)$ gehörigen Spannungskomponenten im Unendlichen verschwinden. An Hand der Gl. (7) erkennt man, daß diese Forderung nur dann erfüllt ist, wenn die Koeffizienten von $f_1(\lambda, \varphi)$ die Bedingung erfüllen

$$S = M_0(-\mu_0) + \sum_1^\infty{}' M_n(-\mu_0) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

D. h.:

$$\begin{aligned} 0 = &(A_0 \cosh \mu_0 + B_0 \mu_0 \sinh \mu_0 - C_0 \sinh \mu_0 - D_0 \mu_0 \cosh \mu_0) \\ &+ (A_1 \cosh 2\mu_0 + B_1 - C_1 \sinh 2\mu_0 - D_1 \mu_0) \\ &+ \sum_2^\infty{}' [A_n \cosh(n+1)\mu_0 + B_n \cosh(n-1)\mu_0 - C_n \sinh(n+1)\mu_0 - D_n \sinh(n-1)\mu_0]. \end{aligned}$$

Im Falle $S \neq 0$ würde $f_1(\lambda, \varphi)$ im Unendlichen einen zusätzlichen hydrostatischen Spannungszustand

$$(\sigma_x)_\infty = (\sigma_y)_\infty = -S$$

ergeben.

3. Randbedingungen und Koeffizientenbestimmung. Die Koeffizienten A_n, B_n, C_n, D_n; $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$, $\bar{C}_n$, $\bar{D}_n$, durch welche die Gestalt von $f_1(\lambda, \varphi)$ bestimmt ist, ergeben sich aus den Randbedingungen in $\mu = \pm \mu_1$ und — sofern der Bereich den unendlich fernen Punkt enthält — aus dem Verhalten des Spannungszustands im Unendlichen.

Wir betrachten hier nur spannungsfreie Ränder bzw. Ränder, die durch gleichförmigen Oberflächendruck p_0, p_1 belastet sind. Die Randbedingungen sind dann

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda=\lambda_0;\,(\mu=+\mu_1)\cdot: & \sigma_\lambda=-p_0; & \tau_{\lambda\varphi}=0 \\ \lambda=\lambda_1;\,(\mu=-\mu_1)\cdot: & \sigma_\lambda=-p_1; & \tau_{\lambda\varphi}=0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Für die Funktion $f(\lambda, \varphi)$ folgt hieraus in Verbindung mit den Spannungsgleichungen (7)

$$\begin{array}{c|l} \lambda=\lambda_0 & f(\lambda_0,\varphi)=(\gamma_0-p_0)\cosh\lambda_0+\alpha_0\sinh\lambda_0+\beta_0\sin\varphi-\gamma_0\cos\varphi \\ (\mu=+\mu_1) & \left[\frac{\partial f(\lambda\,\varphi)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda_0}=(\gamma_0-p_0)\sinh\lambda_0+\alpha_0\cosh\lambda_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} \lambda=\lambda_1 & f(\lambda_1,\varphi)=(\gamma_1-p_1)\cosh\lambda_1+\alpha_1\sinh\lambda_1+\beta_1\sin\varphi-\gamma_1\cos\varphi \\ (\mu=-\mu_1) & \left[\frac{\partial f(\lambda,\varphi)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda_1}=(\gamma_1-p_1)\sinh\lambda_1+\alpha_1\cosh\lambda_1. \end{array}$$

Die hierin auftretenden Integrationskonstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gehen zunächst als selbständige Größen in das Randwertproblem ein.

Über das Verhalten des Spannungszustands im Unendlichen machen wir folgende Annahmen. Der Spannungszustand in hinreichend weiter Entfernung vom Koordinatennullpunkt $x=y=0$ sei mit beliebiger Genauigkeit als homogen anzusehen; es sei also

$$\lim_{x,y\to\infty}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\\ \sigma_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_x\\ t_{xy}\\ p_y\end{Bmatrix}.$$

Für den Anteil $f_0(\lambda, \varphi)$, der dieses Verhalten in sich begreifen soll, folgt dann

$$\left.\begin{array}{l} f_0(\lambda,\varphi)=\frac{1}{2}(p_x+p_y)\cosh\lambda+\frac{1}{2}(p_x-p_y)\left(\cosh\lambda-\frac{\sinh^2\lambda}{\cosh\lambda-\cos\varphi}\right)+t_{xy}\frac{\sinh\lambda-\sin\varphi}{\cosh\lambda-\cos\varphi} \\ \quad+(q_0\cosh\lambda+q_1\sinh\lambda+q_2\cos\varphi+q_3\sin\varphi)\ln 2(\cosh\lambda-\cos\varphi) \end{array}\right\} \quad (12).$$

Hierin erscheinen die vier neuen, selbständigen Konstanten q_0, q_1, q_2, q_3.

Auf den Rändern $\lambda=\lambda_0, \lambda_1$ lassen sich $f_0(\lambda, \varphi)$ und $\frac{\partial}{\partial\lambda} f_0(\lambda, \varphi)$ in gleichmäßig konvergente Fourierreihen entwickeln; es sei

$$\left.\begin{array}{r} f_0(\lambda_0,\varphi)=g_0(\lambda_0)+\sum_1^\infty g_n(\lambda_0)\cos n\varphi+\sum_1^\infty \overline{g}_n(\lambda_0)\sin n\varphi \\ \left[\frac{\partial f_0(\lambda,\varphi)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda_0}=g'_0(\lambda_0)+\sum_1^\infty g'_n(\lambda_0)\cos n\varphi+\sum_1^\infty \overline{g}'_n(\lambda_0)\sin n\varphi \\ f_0(\lambda_1,\varphi)=g_0(\lambda_1)+\sum_1^\infty g_n(\lambda_1)\cos n\varphi+\sum_1^\infty \overline{g}_n(\lambda_1)\sin n\varphi \\ \left[\frac{\partial f_0(\lambda,\varphi)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda_1}=g'_0(\lambda_1)+\sum_1^\infty g'_n(\lambda_1)\cos n\varphi+\sum_1^\infty \overline{g}'_n(\lambda_1)\sin n\varphi \end{array}\right\} \quad (13).$$

Die Entwicklungskoeffizienten g_n, g'_n, $\bar{g}_n$, $\bar{g}'_n$ ergeben sich am einfachsten unter Benutzung der bekannten Reihenentwicklungen

$$\frac{\sinh\lambda}{(\cosh\lambda-\cos\varphi)}=\left(1+2\sum_1^\infty e^{-n\lambda}\cos n\varphi\right)\qquad(\lambda>0)$$

$$=-\left(1+2\sum_1^\infty e^{+n\lambda}\cos n\varphi\right)\qquad(\lambda<0),$$

$$\frac{\sin\varphi}{(\cosh\lambda-\cos\varphi)}=2\sum_1^\infty e^{-n\lambda}\sin n\varphi\qquad(\lambda>0)$$

$$=2\sum_1^\infty e^{+n\lambda}\sin n\varphi\qquad(\lambda<0),$$

$$\ln 2(\cosh\lambda-\cos\varphi)=+\lambda-2\sum_1^\infty\frac{1}{n}e^{-n\lambda}\cos n\varphi\qquad(\lambda>0)$$

$$=-\lambda-2\sum_1^\infty\frac{1}{n}e^{+n\lambda}\cos n\varphi\qquad(\lambda<0).$$

Die Auswertung ergibt bei $\lambda>0$ und $\lambda<0$ (eingeklammerte Vorzeichen).

$$\left.\begin{aligned}
g_0(\lambda)&=+p_x\cosh\lambda+\\
&\quad\overset{+}{\scriptstyle(-)}(p_y-p_x)\cdot 1\cdot\sinh\lambda\overset{+}{\scriptstyle(-)}[q_0\cosh\lambda+q_1\sinh\lambda]\lambda-q_2\left[\frac{e^{(\mp)\lambda}}{1}\right]\\
g_1(\lambda)&=\overset{+}{\scriptstyle(-)}(p_y-p_x)e^{(\mp)\lambda}\sinh\lambda-[q_0\cosh\lambda+q_1\sinh\lambda]\frac{e^{(\mp)\lambda}}{1}-q_2\left[\frac{e^{(\mp)2\lambda}}{2}\overset{-}{\scriptstyle(+)}\lambda\right]\\
g_n(\lambda)&=\overset{+}{\scriptstyle(-)}(p_y-p_x)e^{(\mp)n\lambda}\sinh\lambda-[q_0\cosh\lambda+q_1\sinh\lambda]\frac{e^{(\mp)n\lambda}}{n}\\
&\qquad-q_2\left[\frac{e^{(\mp)(n+1)\lambda}}{n+1}+\frac{e^{(\mp)(n-1)\lambda}}{n-1}\right]\quad(n\geq 2)\\
\bar{g}_1(\lambda)&=2t_{xy}e^{(\mp)\lambda}\sinh\lambda+q_3\left[\frac{e^{(\mp)2\lambda}}{2}\overset{+}{\scriptstyle(-)}\lambda\right]\\
\bar{g}_n(\lambda)&=2t_{xy}e^{(\mp)n\lambda}\sinh\lambda+q_3\left[\frac{e^{(\mp)(n+1)\lambda}}{n+1}-\frac{e^{(\mp)(n-1)\lambda}}{n-1}\right]\quad n\geq 2
\end{aligned}\right\}\quad.\quad(14).$$

Die Koeffizienten $g'_n(\lambda)$ und $\bar{g}'_n(\lambda)$ folgen aus $g_n(\lambda)$ und $\bar{g}_n(\lambda)$ durch Differentiation nach λ.

In Verbindung mit der Entwicklung (13) liefern die Randbedingungen (11a) das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
A_0 \cosh \mu_1 + B_0 \mu_1 \sinh \mu_1 &= \frac{g_0(\lambda_0) + g_0(\lambda_1)}{2} - \frac{1}{2}\left[(\gamma_0 - p_0)\cosh \lambda_0 + \alpha_0 \sinh \lambda_0\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(\gamma_1 - p_1)\cosh \lambda_1 + \alpha_1 \sinh \lambda_1\right] \\
A_0 \sinh \mu_1 + B_0 (\sinh \mu_1 + \mu_1 \cosh) &= \frac{g'_0(\lambda_0) - g'_0(\lambda_1)}{2} - \frac{1}{2}\left[(\gamma_0 - p_0)\sinh \lambda_0 + \alpha_0 \cosh \lambda_0\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(\gamma_1 - p_1)\sinh \lambda_1 + \alpha_1 \cosh \lambda_1\right] \\
C_0 \sinh \mu_1 + D_0 \mu_1 \cosh \mu_1 &= \frac{g_0(\lambda_0) - g_0(\lambda_1)}{2} = \frac{1}{2}\left[(\gamma_0 - p_0)\cosh \lambda_0 + \alpha_0 \sinh \lambda_0\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(\gamma_1 - p_1)\cosh \lambda_1 + \alpha_1 \sinh \lambda_1\right] \\
C_0 \cosh \mu_1 + D_0 (\cosh \mu_1 + \mu_1 \sinh \mu_1) &= \frac{g'_0(\lambda_0) + g'_0(\lambda_1)}{2} - \frac{1}{2}\left[(\gamma_0 - p_0)\sinh \lambda_0 + \alpha_0 \cosh \lambda_0\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(\gamma_1 - p_1)\sinh \lambda_1 + \alpha_1 \cosh \lambda_1\right] \\
A_1 \cosh 2\mu_1 + B_1 &= \frac{g_1(\lambda_0) + g_1(\lambda_1)}{2} + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \\
2 A_1 \sinh 2\mu_1 &= \frac{g'_1(\lambda_0) - g'_1(\lambda_1)}{2} \\
C_1 \sinh 2\mu_1 + D_1 \mu_1 &= \frac{g_1(\lambda_0) - g_1(\lambda_1)}{2} + \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1) \\
2 C_1 \cosh 2\mu_1 + D_1 &= \frac{g'_1(\lambda_0) + g'_1(\lambda_1)}{2} \\
A_n \cosh (n+1)\mu_1 + B_n \cosh (n-1)\mu_1 &= \frac{g_n(\lambda_0) + g_n(\lambda_1)}{2} \\
A_n (n+1) \sinh (n+1)\mu_1 + B_n (n-1) \sinh (n-1)\mu_1 &= \frac{g'_n(\lambda_0) - g'_n(\lambda_1)}{2} \\
(n \geqq 2) \qquad & \\
C_n \sinh (n+1)\mu_1 + D_n \sinh (n-1)\mu_1 &= \frac{g_n(\lambda_0) - g_n(\lambda_1)}{2} \\
C_n (n+1) \cosh (n+1)\mu_1 + D_n (n-1) \cosh (n-1)\mu_1 &= \frac{g'_n(\lambda_0) + g'_n(\lambda_1)}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Für die überstrichenen Konstanten $\bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n$ $(n \geqq 1)$ bestehen die entsprechenden Gleichungen mit $\bar{g}_n$ und $\bar{g}'_n$ und $-\beta_0, -\beta_1$ statt γ_0, γ_1. Diese Gl. (15) reichen zur eindeutigen Bestimmung der Koeffizienten von $f_1(\lambda, \varphi)$ nicht aus. Die Koeffizienten erscheinen vielmehr in linearer Verbindung mit den 10 Größen

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ q_0;\ q_1, q_2, q_3\,.$$

Nimmt man nun noch Gl. (9) mit $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ und die Bedingung (10) hinzu, so können weitere vier der noch freien Konstanten bestimmt werden. Anstatt nach Gl. (9) über $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ zu verfügen, kann man die Werte der Aggregate ω_2 offen lassen und statt dessen drei der Konstanten $\alpha_0\, \beta_0\, \gamma_0$ (oder $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$) willkürlich festsetzen; z. B. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$. Beide Festsetzungen sind, wie leicht ersichtlich, gleichwertig. Von welcher Möglichkeit man zweckmäßig Gebrauch zu machen hat, kann natürlich nur von Fall zu Fall entschieden werden. In allen Fällen bleiben immer sechs Konstanten zunächst unbestimmt.

Der mechanische Sinn dieser Unbestimmtheit ist bekannt; es sind in dem dreifach zusammenhängenden Gebiet Spannungszustände möglich, die zwar die Randbedingungen erfüllen, nicht aber aus einem eindeutigen Verschiebungszustand herleitbar sind (Selbstspannungszustände).

Zur Herstellung mechanisch realisierbarer Lösungen ergeben sich nunmehr zwei Wege, die beide in gleicher Weise praktisch wichtig sind.

a) Man bestimmt die sechs freien Konstanten so, daß der zur Funktion $f(\lambda, \varphi)$ gehörige Verschiebungszustand in dem dreifach zusammenhängenden Bereich eindeutig ist.

b) Man denkt sich den dreifach zusammenhängenden Bereich durch einen geeigneten Schnitt in einen zweifach zusammenhängenden verwandelt. Die freien Konstanten werden dann so bestimmt, daß die Spannungsverteilung in der Schnittlinie statisch gleichwertig mit einer vorgeschriebenen Kräfteverteilung ist; daneben ist zu fordern, daß der Verschiebungszustand in dem aufgeschnittenen zweifach zusammenhängenden Bereich eindeutig sei.

In gleicher Weise kann man natürlich auch durch zwei Schnitte einen einfach zusammenhängenden Bereich herstellen und über die Spannungsverteilung in beiden Schnittflächen Festsetzungen treffen.

Auf diesem Wege erhält man Näherungslösungen für die in Abb. (3) skizzierten Belastungsfälle der geschlitzten doppelt gelochten Scheibe. Im Fall $\lambda_0 \cdot \lambda_1 > 0$ (exzentrischer Ring)

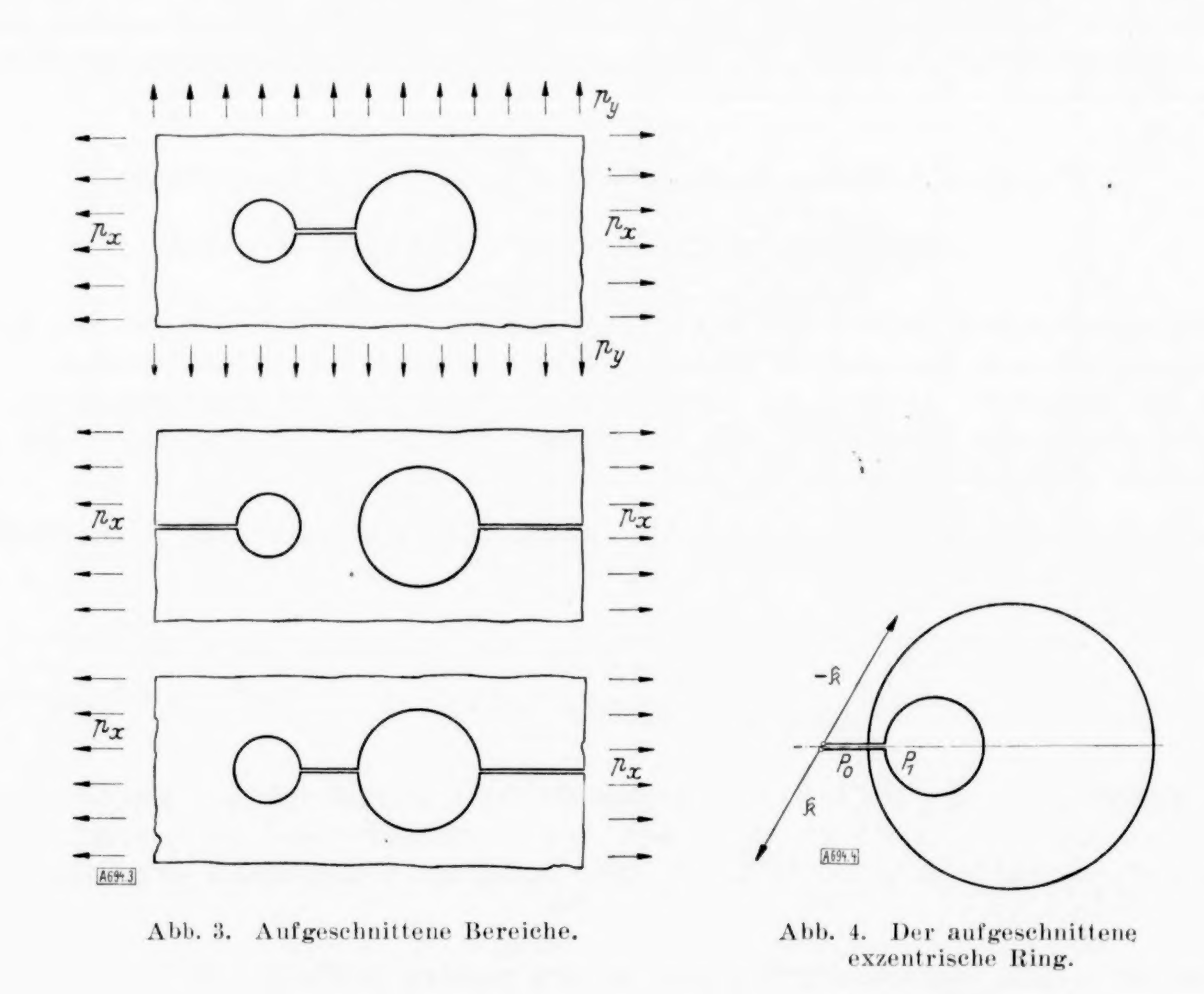


Abb. 3. Aufgeschnittene Bereiche.

Abb. 4. Der aufgeschnittene exzentrische Ring.

können durch das Schnittverfahren die von W. Olszak und Sonntag[3]) angegebenen Näherungslösungen für den aufgeschnittenen Ring (Abb. 4) gewonnen werden.

In der vorliegenden Arbeit soll indes nur von der Bedingung eindeutiger Verschiebungen Gebrauch gemacht werden.

4. Eindeutigkeit des Verschiebungszustands. Die Bedingung für die Eindeutigkeit des Verschiebungsvektors[4]) ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß das Integral

$$W = \oint [U(x, y) + i\, V(x, y)]\, d(x + i\, y)$$

erstreckt über jeden Teilrand des Bereichs verschwindet; dabei ist $U(x, y) = \nabla^2 F(x\, y)$ und $V(x, y)$ das zu U konjugierte Potential.

[3]) R. Sonntag: Mitt. Mech.-Techn. Lab. T. H. München, Heft 35, S. 4. — W. Olszak: A. a. O.

[4]) Über den Zusammenhang zwischen Spannungsfunktion und Verschiebung vgl. z. B. Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität (1907), S. 243.

Für die Koeffizienten von $f_1(\lambda, \varphi)$ ergeben sich dann die Beziehungen

$$B_0 \sinh \mu_0 - D_0 \cosh \mu_0 = D_1\,, \qquad B_0 \cosh \mu_0 - D_0 \sinh \mu_0 = 0\,, \qquad \bar{D}_1 = 0 \quad . \; . \; (18).$$

Für die Koeffizienten q_0, q_1, q_2, q_3 folgt

$$q_0 + q_2 = 0; \qquad q_1 = q_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

Die Bedingung eindeutiger Verschiebung liefert in der Tat also sechs weitere Gleichungen, die von den früheren linear unabhängig sind und daher zur vollständigen Bestimmung der Spannungsfunktion ausreichen. Der folgende Abschnitt enthält einige spezielle Anwendungsbeispiele zu diesen allgemeinen Entwicklungen.

Zweiter Teil. Anwendungen.

1. Das exzentrische Rohr unter Innen- und Außendruck. Als einfachstes Anwendungsbeispiel zu der entwickelten Methode bietet sich das exzentrische Rohr unter Innen- und Außendruck dar. Da das Ringgebiet den unendlich fernen Punkt nicht enthält und singuläre Lastangriffe nicht vorhanden sind, ist $f_0(\lambda, \varphi) = 0$ zu setzen. Infolgedessen verschwinden alle Entwicklungskoeffizienten A_n, B_n, C_n, D_n $n \geqq 2$, ebenso aus Symmetriegründen sämtliche überstrichenen Konstanten. Die Spannungsfunktion erscheint also in geschlossener Form

$$f(\lambda, \varphi) = [A_0 \cosh \mu \;\; + B_0 \mu \sinh \mu + C_0 \sinh \mu \;\; + D_0 \mu \cosh \mu]$$
$$+ [A_1 \cosh 2\mu + B_1 \qquad\qquad + C_1 \sinh 2\mu + D_1 \mu] \cos \varphi\,.$$

Die Koeffizienten können ohne Mühe den Gl. (9) und (15) in Verbindung mit den Eindeutigkeitsrelationen, die sich hier auf die drei Gl. (18) reduzieren, entnommen werden.

Für die praktische Anwendung interessieren naturgemäß die Spannungskomponenten, und hiervon wieder die Größtwerte, die aus Symmetriegründen am Innenrand der engsten Stelle erwartet werden dürfen.

Die Umfangsspannungen σ_φ an den beiden Begrenzungen haben die folgende Form:

Innenrand $\lambda = \lambda_0$

$$\sigma_\varphi(\lambda_0, \varphi) = -p_0 + 2a^2(p_0 - p_1)\frac{\coth(\lambda_0 - \lambda_1)}{(\sinh^2 \lambda_0 + \sinh^2 \lambda_1{}^2)}(\cosh \lambda_0 - \cos \varphi)[\sinh \lambda_0 + \operatorname{tgh}(\lambda_0 - \lambda_1)\cos \varphi]\,,$$

Außenrand $\lambda = \lambda_1$

$$\sigma_\varphi(\lambda_1, \varphi) = -p_1 + 2a^2(p_0 - p_1)\frac{\coth(\lambda_0 - \lambda_1)}{(\sinh^2 \lambda_0 + \sinh^2 \lambda_1)}(\cosh \lambda_1 - \cos \varphi)[\sinh \lambda_1 + \operatorname{tgh}(\lambda_0 - \lambda_1)\cos \varphi]\,.$$

Die Höchstwerte σ_0, σ_1 hiervon ergeben sich an der engsten Stelle $\varphi = \pi$.

$$\sigma_0 = \sigma_\varphi(\lambda_0, \pi)\,, \qquad \sigma_1 = \sigma_\varphi(\lambda_1, \pi)\,.$$

Führt man an Stelle der Parameter λ_0, λ_1, a nach Ziffer (1) a die Abmessungen r_0, r_1, e des Rings ein, so ergibt sich

$$\sigma_0 = 2(p_0 - p_1)\frac{r_1{}^2}{r_1{}^2 - (r_0 + e)^2}\left(1 - e\frac{2r_0 + e}{r_1{}^2 + r_0{}^2}\right) - p_0\,,$$

$$\sigma_1 = 2(p_0 - p_1)\frac{r_0{}^2}{(r_1 - e)^2 - r_0{}^2}\left(1 + e\frac{2r_1 - e}{r_1{}^2 + r_0{}^2}\right) - p_1\,.$$

Für $e = 0$ folgen hieraus die bekannten Laméschen Formeln für das konzentrische Rohr.

Verwendet man an Stelle der Abmessungen r_0, r_1, e die dimensionslosen Größen

$$\left(\frac{r_0}{r_1}\right) = \varrho \text{ (Radienverhältnis)}, \qquad \frac{e}{r_1 - r_0} = \zeta \text{ (Exzentrizitätsmaß)},$$

so wird:

$$\sigma_0 = (p_0 - p_1)\frac{m_0(\varrho,\zeta)}{(1-\varrho)(1-\zeta)} - p_0, \qquad \sigma_1 = (p_0 - p_1)\frac{m_1(\varrho,\zeta)}{(1-\varrho)(1-\zeta)} - p_1 .$$

Die Beiwerte m_0 und m_1 sind in Abb. (5) in Abhängigkeit von ϱ und ζ aufgetragen.

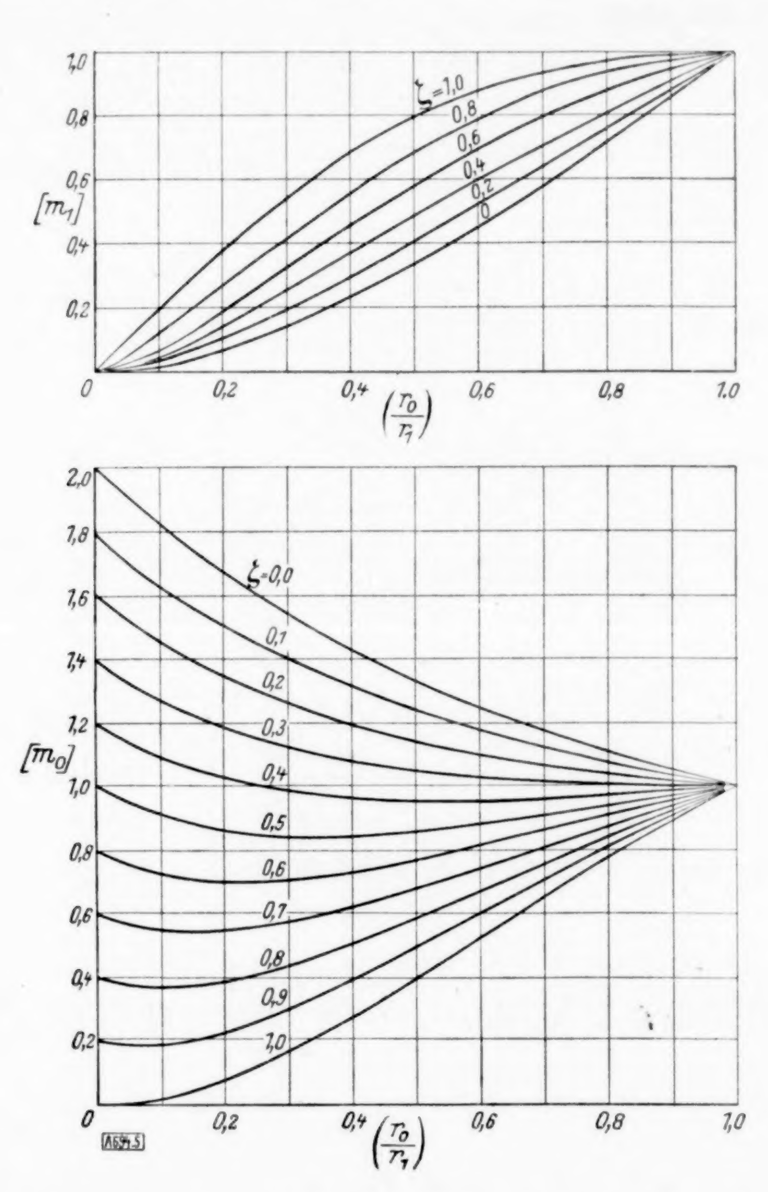


Abb. 5. Das exzentrische Rohr unter Innen- und Außendruck: Die Beiwerte m_0 und m_1 in Abhängigkeit von den Rohrabmessungen $\varrho = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)$ und ζ.

2. Die doppelt gelochte Scheibe unter einseitigem Zug (Abb. 6). Die wichtigste Anwendung finden die allgemeinen Entwicklungen des I. Abschnitts in der Berechnung der Spannungserhöhung in einer doppelt gelochten Scheibe bei einseitigem Zug oder Druck. Wir behandeln

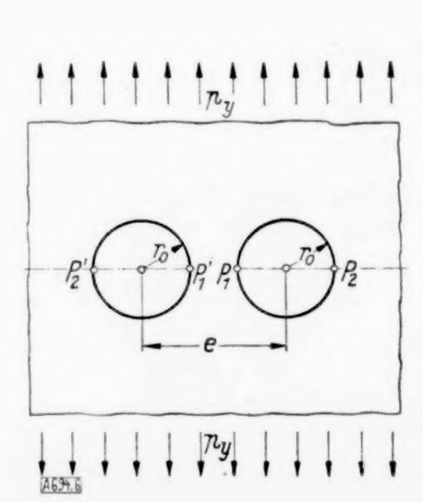


Abb. 6. Die doppelt gelochte Scheibe unter einseitigem Zug.

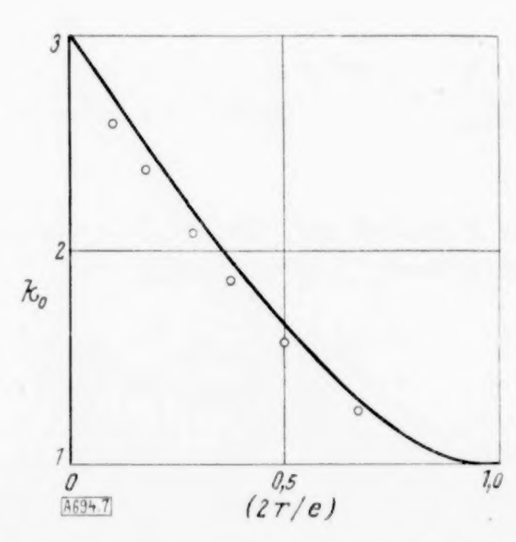


Abb 7. Die doppelt gelochte Scheibe unter einseitigem Zug: Die Kerbziffer k_0 in Abhängigkeit vom Kerbmaß $\left(\frac{2r_0}{e}\right)$. Zugleich Näherungslösung für gekerbte Zugstäbe:
—— Rechnung.
• • • Messungen von M. Frocht.

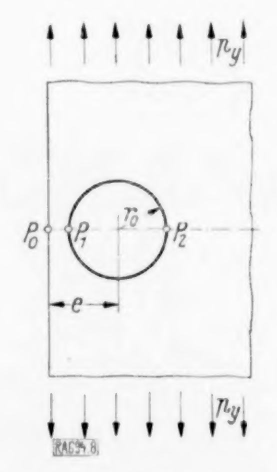


Abb. 8. Die gelochte Halbscheibe unter einseitigem Zug.

hier nur den Fall zweier gleich großer Kreislöcher; die Zugspannung sei parallel der y-Richtung.

Durch Verbindung mit der Lösung von C. Weber[5]) für allseitigen Zug ist dann auch die Spannungsverteilung für beliebige Zugrichtung gegeben.

Infolge der Symmetrie verschwinden die Koeffizienten $\overline{C}_n$, $\overline{D}_n$ und $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$, $\overline{C}_n$, $\overline{D}_n$. Die Ermittlung der übrigen Konstanten vereinfacht sich dadurch erheblich. Für die Umfangsspannungen am Rande findet man

$$\sigma_\varphi(\lambda_0, \varphi) = q_0 \sinh\lambda_0 (\cosh\lambda_0 - \cos\varphi)\left[1 + 4\sum_2^\infty \frac{\sinh n\lambda_0 \cos n\varphi}{\sinh 2n\lambda_0 + n\sinh\lambda_0}\right]$$

$$-4p_y(\cosh\lambda_0 - \cos\varphi)\sum_1^\infty n\frac{\cosh n\lambda_0\cosh\lambda_0 - n\sinh n\lambda_0\sinh\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 - n\sinh 2\lambda_0}\cos n\varphi\,.$$

q_0 berechnet sich dabei aus der Beziehung

$$p_y \operatorname{tgh}\lambda_0 \sum_1^\infty P_n = q_0\left[\frac{1+\sinh 2\lambda_0}{2} - \operatorname{tgh}\lambda_0\sum_1^\infty \frac{1}{n}P_n - \sum_2^\infty \frac{1}{n(n^2-1)}Q_n\right];$$

$$P_n = \frac{n\sinh 2\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 + n\sinh 2\lambda_0}\quad Q_n = \left(1 - \frac{\cosh 2n\lambda_0 - \cosh 2\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 + n\sinh 2\lambda_0}\right).$$

Für die Spannungen an den Stellen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ folgt

$$\varphi = \pi;\qquad \sigma_0 = [\cosh\lambda_0 + 1]\left\{q_0\sinh\lambda_0\left[1 + 4\sum_2^\infty(-1)^n\frac{\sinh n\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 + n\sinh 2\lambda_0}\right]\right.$$

$$\left.-4p_y\sum_1^\infty(-1)^n n\frac{\cosh n\lambda_0\cosh\lambda_0 - n\sinh n\lambda_0\sinh\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 - n\sinh 2\lambda_0}\right\}.$$

$$\varphi = 0;\qquad \sigma_1 = [\cosh\lambda_0 - 1]\left\{q_0\sinh\lambda_0\left[1 + 4\sum_2^\infty\frac{\sinh n\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 + n\sinh 2\lambda_0}\right]\right.$$

$$\left.-4p_y\sum_1^\infty n\frac{\cosh n\lambda_0\cosh\lambda_0 - n\sinh n\lambda_0\sinh\lambda_0}{\sinh 2n\lambda_0 - n\sinh 2\lambda_0}\right\}.$$

In der von den beiden Kreisen gebildeten Verengung wird dabei eine Zugkraft P übertragen entsprechend einer mittleren Zugspannung

$$\sigma_m = \left(\frac{P}{2a}\right)\coth\lambda_0/2\,.$$

Das Verhältnis $k_0 = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m}\right)$ bezeichnet man in der Festigkeitslehre als „Kerbziffer". In Abb. (7) ist k_0 in Abhängigkeit von $(2r_0/e)$ aufgetragen.

Nach dem Saint Venantschen Prinzip darf man erwarten, daß die erhaltene Kerbzahl zugleich auch näherungsweise die Kerbwirkung bei flachen, halbkreisförmig eingekerbten

[5]) C. Weber: Über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Blech. ZAMM 2 (1922), S. 185.

Zugstäben wiedergibt. Diese Erwartung wird durch Vergleich mit photoelastischen Messungen, die M. Frocht[6]) an solchen Stäben ausgeführt hat, bestätigt (Abb. 7).

Im Grenzfall $\lambda_0 \to \infty$, d. h. für hinreichend weit abstehende Löcher erhält man mit $k_0 = 3$ ein wohlbekanntes Resultat[7]).

3. Die gelochte Halbscheibe unter gleichförmigem Zug (Abb. 8). Auch hier verschwinden die überstrichenen Koeffizienten aus Symmetriegründen. Auch die Eindeutigkeitsrelationen vereinfachen sich mit $q_0 = 0$ ganz wesentlich. Die leicht verwertbaren Ausdrücke für die Randspannungen sind praktisch wichtig. Es ergibt sich:

Am Rand $\lambda = 0$.

$$\sigma_\varphi(0, \varphi) = p_y \left\{1 - (1 - \cos\varphi)\left[\frac{4\cos\varphi}{e^{2\lambda_0} - 1} + \sum_2^\infty n\,(P_n + Q_n)\cos n\varphi\right]\right\}.$$

Am Rand $\lambda = \lambda_0$.

$$\sigma_\varphi(\lambda_0, \varphi) = p_y(\cosh\lambda_0 - \cos\varphi)\left\{\frac{1}{\sinh\lambda_0} + \sum_2^\infty n\,(P_n - Q_n)\cos n\varphi\right\}.$$

Dabei ist

$$P_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\cosh n\lambda_0 - \cosh\lambda_0}{\sinh n\lambda_0 - n\sinh\lambda_0} - 1\right],$$

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\cosh n\lambda_0 + \cosh\lambda_0}{\sinh n\lambda_0 + n\sinh\lambda_0} - 1\right].$$

Die Entwicklungen konvergieren sehr gut. Für die Randspannungen an den in Abb. (8) gekennzeichneten Stellen $P_0\, P_1\, P_2$ folgt daraus

$$\sigma_0 = p_y\left[(4\coth\lambda_0 - 3) + \sum_2^\infty n\,(-1)^n\,(P_n + Q_n)\right],$$

$$\sigma_1 = p_y\left[\coth\frac{\lambda_0}{2} + (\cosh\lambda_0 + 1)\sum_2^\infty n\,(-1)^n\,(P_n - Q_n)\right].$$

$$\sigma_2 = p_y\left[\operatorname{tgh}\frac{\lambda_0}{2} + (\cosh\lambda_0 - 1)\sum_2^\infty n\,(P_n - Q_n)\right].$$

Im Steg wird dabei eine Kraft $P = a\,p_y$ übertragen; ihr entspricht als mittlere Spannung

$$\sigma_m = P/(e - r_0) = p_y\coth\frac{\lambda_0}{2}.$$

Für $(2\,r_0/e) = 0$ ergeben sich wieder die bekannten Ergebnisse für die unendlich breite Scheibe mit einem Kreisloch.

Die von Olszak, Pöschl, Weber und Sonntag gefundenen Lösungen lassen sich auf dem hier angegebenen Weg leicht verifizieren. Über weitere Ergebnisse soll an anderer Stelle berichtet werden. 694

[6]) M. M. Frocht: Factors of stress concentration photoelastically determined. Journ. Appl. Mech. 2, A 67—A 68 (1935).

[7]) Vgl. z. B.: A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. I (1924), S. 315.

Die Abbildung durch die Euler-Savarysche Formel.

Von *W. Meyer zur Capellen* VDI in Aachen.

1. Einleitung. Eine in der Kinematik häufig verwandte, durch die Bobillierschen oder Hartmannschen Konstruktionen zeichnerisch gedeutete, eindeutige Beziehung zwischen den Punkten A der bewegten Ebene und den Krümmungsmittelpunkten A_0 der von ihnen im Augenblick beschriebenen Bahnstellen stellt die Euler-Savarysche Formel

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{D \cdot \sin\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dar, worin (s. Abb. 1) $r = PA$ und $\varrho = PA_0$ der Abstand des Punktes A bzw. des Krümmungs-

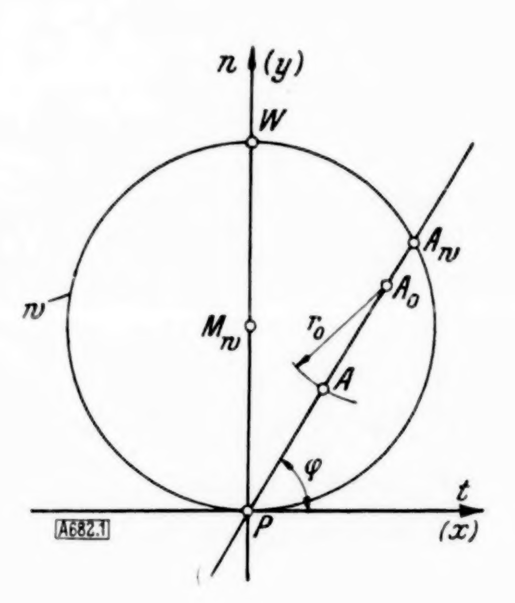


Abb. 1. Grundfigur. Einführung der Bezeichnungen.

mittelpunktes A_0 vom zunächst im Endlichen angenommenen Momentanpol P, φ der Winkel des Strahls PA mit der positiven Polbahntangente t, wobei die positive Polbahnnormale n die von P zum Wendepol W gezogene Gerade ist, worin ferner $D = 2R$ den Wendekreisdurchmesser und $D \cdot \sin\varphi = D^*$ die Strecke PA_w bedeutet, wenn A_w der Schnittpunkt des Strahls PA mit dem Wendekreis w. Entgegen der bei Polarkoordinaten üblichen Festlegung seien hier r oder ϱ positiv bzw. negativ, wenn die Punkte A oder A_0 oberhalb bzw. unterhalb t, d. h. in der oberen bzw. unteren Halbebene liegen, so daß $180^0 \geqq \varphi \geqq 0$. Dadurch wird bei der Formel ein manchmal in den Lehrbüchern auftretendes doppeltes Vorzeichen vermieden.

Die genannte Formel gilt für einen augenblicklichen durch drei unendlich benachbarte Lagen bestimmten Bewegungszustand, so daß alle Einzelfälle eine maßstäbliche Umzeichnung entsprechend dem Wendekreisdurchmesser darstellen.

A. Die Abbildung.

Die Euler-Savarysche Formel bildet somit die r- bzw. die t-n- oder x-y-Ebene auf die ϱ- oder u-v-Ebene ab, wobei P als singulärer Punkt gilt, weil er im allgemeinen sich in sich selbst abbildet (s. jedoch Abs. C) und wobei die durch P gehenden Geraden in bestimmter projektiver Punktbeziehung in sich selbst übergeführt werden. Einfachen Kurven der r-Ebene entsprechen dann gewisse Kurven, wie folgt, in der ϱ-Ebene.

2. Das Kreisbüschel durch P mit t als gemeinsamer Tangente, gegeben durch $r = d \cdot \sin\varphi$ ($d \gtreqless 0$), bildet sich in das gleichartige durch $\varrho = d_0 \cdot \sin\varphi$ mit $d_0 = \dfrac{D \cdot d}{D - d}$ gegebene Kreisbüschel ab (wonach z. B. die Evolute einer gespitzten Trochoide eine dieser ähnliche Trochoide ist, vgl. a. L 7[1])).

Hierdurch ist eine einfache, im weiteren zu beachtende und für die praktischen Anwendungen einen leichten Überblick ermöglichende Einteilung der Ebenen gegeben: Dem

[1]) L bedeutet die Nr. der Schrifttumshinweise am Schluß.

Inneren des Halbwendekreises bzw. diesem selbst $\left(d = \frac{D}{2}\right)$ entspricht das Innere des Wendekreises w bzw. dieser selbst, dem zwischen Halbwendekreis und w gelegenen Flächenteil das Äußere von w in der oberen Halbebene, dem Wendekreis die unendlich ferne Gerade, dem Äußeren von w in der oberen Halbebene das Äußere des Rückkehrkreises ψ in der unteren Halbebene, der unendlich fernen Geraden der Rückkehrkreis, der unteren Halbebene das Innere des Rückkehrkreises, insbesondere dem Rückkehrkreis der Halbrückkehrkreis $\left(d_e = -\frac{D}{2}\right)$, und der Polbahntangente der Momentanpol.

3. Konzentrische Kreise um P. Für das Bild des um P als Mittelpunkt gezogenen Kreises vom Halbmesser $\bar{r}$ folgt nach Gl. (1) mit $r = \pm \bar{r}$ die zirkulare „r-Kurve" vierter Ordnung

$$D^2 v^2 (u^2 + v^2) - r^2 (D v + u^2 + v^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

die, sofern $\bar{r} < D$, die leicht zu zeichnenden Asymptoten von der Gleichung $v = (D \cdot \operatorname{tg} \varphi^* \pm u) \cdot \operatorname{tg} \varphi^*$ mit $\operatorname{tg} \varphi^* = \bar{r} : D$ hat, während für $\bar{r} > D$ vollständig geschlossene Kurven auftreten (Abb. 2). Außer auf der Polbahnnormalen n besitzt die r-Kurve noch für $\bar{r} \leq D$ je zwei Minima in den Schnittpunkten der r-Kurve mit dem Wendekreis, d. h. den Bildern der Schnittpunkte von Halbwendekreis und Kreis $\bar{r} =$ konst., so daß für $\bar{r} = D/2 = R$ und $\varphi = 90^0$ das Bild der Wendepol ist mit vierpunktig berührender Tangente.

Hiergegen ist der geometrische Ort der Wendepunkte eine zirkulare Kurve vierter Ordnung[2]) (Ib, Abb. 2), d. h. das Bild einer bizirkularen Kurve vierter Ordnung (Ia, Abb. 2) und der

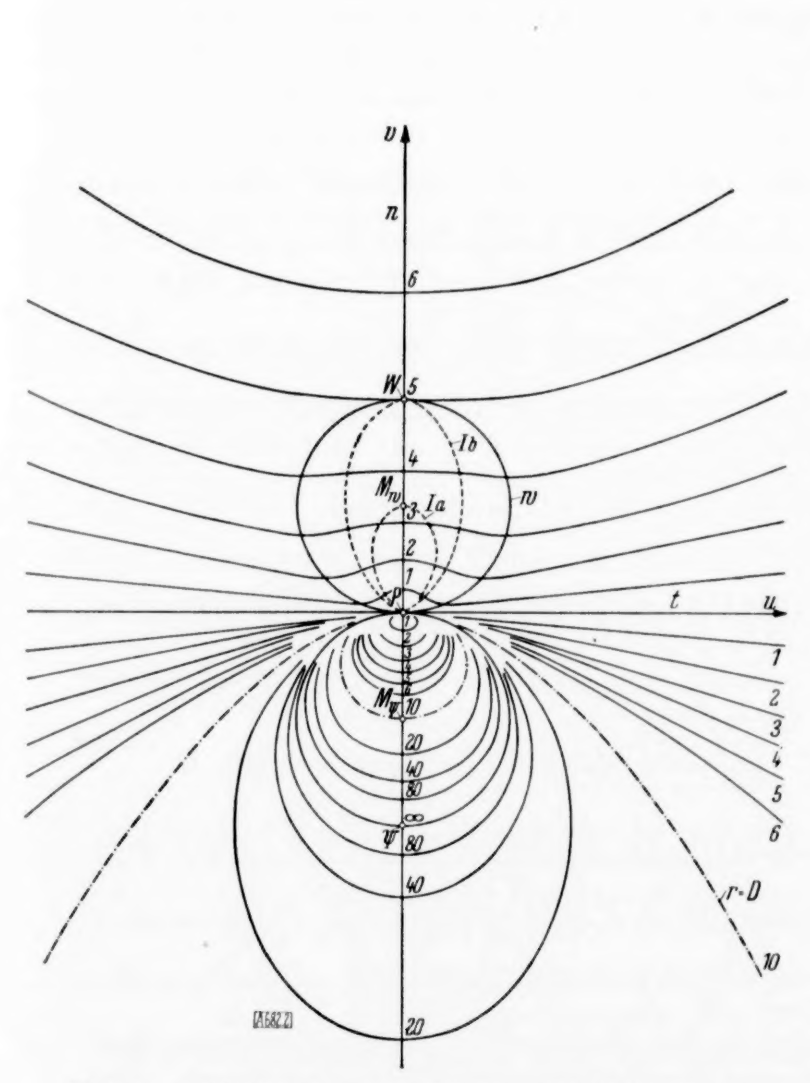


Abb. 2. Abbildung der zu P konzentrischen Kreise $|r| = \bar{r} =$ konst. — Die angeschriebenen Zahlen geben die Werte m in $\bar{r} = \frac{m}{10} D$ an.

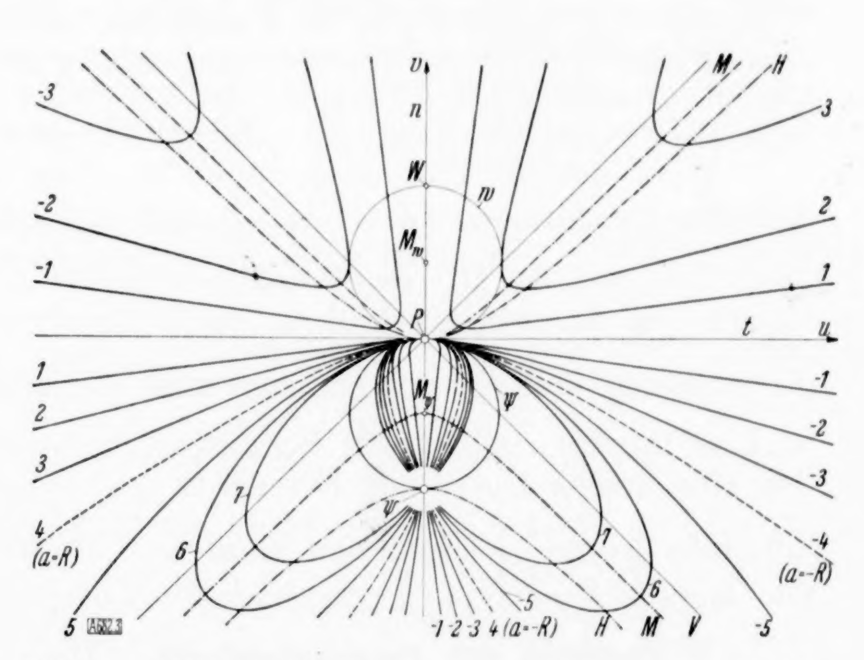


Abb. 3. Abbildung der Geraden $x = a =$ konst. — Die Zahlen geben die Werte m in $a = \frac{m}{8} D$ an.

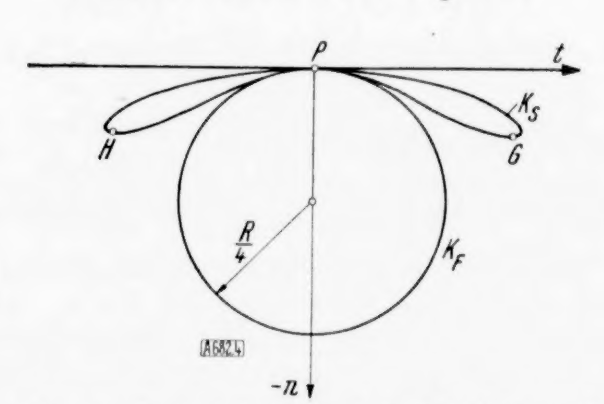


Abb. 4. Geom. Ort der Scheitel (K_S) und der Brennpunkte (K_F) der Bilder der Wendekreistangenten (Parabeln)[3]).

der Punkte mit n-paralleler Tangente ebenfalls eine zirkulare Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze in P.

---

[2]) Auf dem Strahl φ_w mit $\sin \varphi_w = \sqrt[3]{\frac{r}{R}}$.

[3]) Der t-parallele Durchmesser von K_F trifft K_F in F_p^+ (rechts) und in F_p^- (links).

4. Parallele zur Polbahnnormale. Die Geraden der bewegten Ebene bilden sich bekanntlich in Kegelschnitte ab [L 1, L 3]. Für die u- oder y-parallelen Geraden $x = a =$ konst. ergibt sich ihre Lage durch

$$\varrho = \frac{D\, a \sin\varphi}{D \sin\varphi \cos\varphi - a} \quad \text{oder} \quad a\,(u^2+v^2) + 2\,a\,R\,v - 2\,R\,u\,v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ihre Achsen sind den Winkelhalbierenden der Quadranten parallel, ihre Mittelpunkte folgen durch $u_0 = \dfrac{a \cdot R^2}{R^2 - a^2}$ und $v_0 = u_0 \cdot \dfrac{a}{R}$, und ihre hierauf bezogene Gleichung $U^2 B^2 + A^2 V^2 = A^2 B^2$ liefert die Halbachsen $A = \left|\dfrac{R \cdot a}{R - a}\right| \sqrt{\dfrac{a}{R + a}}$ und $B = \left|\dfrac{R \cdot a}{R + a}\right| \sqrt{\dfrac{a}{a - R}}$, so daß Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen vorliegen, je nachdem $-R \lesseqgtr a \lesseqgtr R$ (Abb. 3). Im zweiten Fall haben die Scheitel G und H (Abb. 4) die Koordinaten $u_0 = \pm \dfrac{3}{8} R$ und $v_0 = \dfrac{1}{8} R$, und die Parabelbrennpunkte F_p^+ und F_p^- (Abb. 4) sind dann die Fußpunkte des von P auf die U- bzw. V-Achse gefällten Lotes.

Sämtliche Kegelschnitte berühren sich im Momentanpol, wo der Rückkehrkreis ihr Krümmungskreis, und schneiden sich im Rückkehrpol, wo ihre Tangenten durch die Punkte $u = a$ der u-Achse gehen. Ihre Mittelpunkte liegen auf der gleichseitigen Hyperbel (M, Abb. 3) mit den Scheiteln P und M_φ, die Punkte mit t-paralleler Tangente auf der gleichseitigen Hyperbel (H, Abb. 3) mit den Scheiteln P und Ψ, und schließlich die Punkte mit n-paralleler Tangente auf den Winkelhalbierenden der Quadranten.

Die Brennpunkte der Kegelschnitte bilden die „Fokuskurven" F^+ und F^- für $a \geqq 0$ bzw. $a \leqq 0$, d. h. die zirkularen Kurven dritter Ordnung

$$(u \mp v)^2\,(u^2 + v^2) \mp R\,v^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mit den Asymptoten $v = \pm u - \dfrac{R}{2}$ und einer Spitze in P mit t als Tangente. Die Kurven schneiden sich in M_ψ rechtwinklig, und die Schnittpunkte der imaginären Tangenten in den imaginären Kreispunkten, d. h. die Fokalzentren der Kurven F^+ bzw. F^- haben bzw. die Koordinaten $u = \pm v = \mp \dfrac{R}{4}$, sind also die Brennpunkte F_p^- bzw. F_p^+ der Parabeln $a = \mp R$, welche Punkte zugleich die Schnittpunkte der Fokuskurven bzw. mit den Asymptoten sind. — Da eine solche Kurve als Erzeugnis des Kreisbüschels $x^2 + y^2 - \lambda\,R\,y = 0$ und des Geradenbüschels $y = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}\,x$ gedeutet werden kann, findet man sie leicht zeichnerisch.

5. Parallele zur Polbahntangente. Die Geraden $y = b =$ konst. bilden sich ab in die Kegelschnitte

$$\varrho = \frac{D\, b \sin\varphi}{D \sin^2\varphi - b} \quad \text{oder} \quad \frac{(v - v_0)^2}{A^2} - \frac{u^2}{B^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

deren Mittelpunkte durch $v_0 = \dfrac{R\,b}{D - b}$, $u_0 = 0$, deren Halbachsen durch $A = |v_0|$ und $B = \sqrt{R\,v_0}$ bestimmt sind und deren Scheitelkrümmungshalbmesser gleich R sind (ψ berührt in P vierpunktig).

Für $0 < b < D$ erhält man Hyperbeln, deren Asymptotenrichtung durch $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{D}}$ gegeben, für $b = D$ die Parabel $u^2 = -D\,v$ mit dem Mittelpunkt des Halbwendekreises als Brennpunkt, für $b > D$ Ellipsen, deren große Achsen auf n liegen, und für $b < 0$ Ellipsen, deren große Achsen parallel t und deren Brennpunkte den Halbrückkehrkreis erfüllen.

6. Die Wendekreistangenten. Bekanntlich bilden sich die den Wendekreis berührenden Geraden (oben $y = b = D$ bzw. $x = a = \pm R$) in Parabeln ab, die in P den Rückkehrkreis als Krümmungskreis haben [L 1]. Bezeichnet dann β den Winkel des vom Pol zum Berührungspunkt der Geraden gezogenen Strahls mit der positiven x-Achse, so ist dies die Achsenrichtung der Parabel, während ihre Scheitel durch

$$u_s = \frac{R}{8} \cdot \sin 2\beta \cdot (3 - \cos 2\beta) \quad \text{und} \quad v_s = -\frac{R}{8} \cdot \sin^2 2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

bestimmt sind. Deren geometrischer Ort ist somit eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung[4]) („K_S“, Abb. 4), welche für $\beta = 45^0$ bzw. 135^0 ($\alpha = \pm R$) eine t-parallele Tangente besitzt und im Doppelpunkt P den Viertelwendekreis ($\beta = 0$) bzw. den Rückkehrkreis ($\beta = 90^0$) als Krümmungskreis hat. Die Parameter sind durch $p = R \cdot \sin^3 \beta$ und die Brennpunkte durch die Koordinaten $u_F = \frac{R}{4} \cdot \sin 2\beta$ und $v_F = -\frac{R}{2} \cdot \sin^2 \beta$ gegeben, d. h. diese erfüllen den Viertelrückkehrkreis (K_F, Abb. 4).

B. Die Krümmungsfläche.

7. Allgemeine Gleichung. Ebenso wie jedem Punkt der bewegten Ebene ein Krümmungsmittelpunkt der festen Ebene zugeordnet ist, kann jedem Punkt der Krümmungsradius zugeordnet werden. Dieser berechnet sich aus $r_0 = \varrho - r$ (Abs. 1 u. Abb. 1) zu

$$r_0 = \frac{r^2}{D \sin \varphi - r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7\,a).$$

Danach ist r_0 für $r \lesseqgtr D \sin \varphi$ positiv bzw. negativ. Dies bedeutet, daß für einen auf dem unendlich fernen Punkte des Fahrstrahls φ befindlichen Beobachter in der oberen Halbebene die Punkte in der oberen Halbebene außerhalb w die entgegengesetzte Krümmung haben wie die anderen Punkte. Für $r = D^* = D \sin \varphi$ wird r_0 unendlich, jedoch wenn gleichzeitig $\varphi = 0$, unbestimmt, im allgemeinen jedoch gleich Null (vgl. Abs. C und [L 4]).

Man könnte nun ähnlich wie oben die Punkte der x-y- oder der r-Ebene abbilden auf eine r_0- oder U-V-Ebene derart, daß der von P unter dem Winkel φ gezogene Strahl der r_0-Ebene die Länge r_0 mit entsprechendem Vorzeichen hat. Vorteilhafter ist es jedoch, unter Benutzung der räumlichen Darstellung in jedem Punkt der r-Ebene den Krümmungsradius r_0 senkrecht zu dieser als dritte Raumkoordinate z aufzutragen. Dann ist der Krümmungsradius in seinem funktionalen Verlauf durch eine Fläche dargestellt, die mit Krümmungsfläche oder kurz mit r_0-Fläche bezeichnet sei und die im weiteren näher untersucht werden soll[5]).

Da das Vorzeichen von r_0 an sich unwesentlich ist, sei nur der Absolutbetrag betrachtet, so daß die Fläche nur für positive Werte z definiert ist mit der Gleichung

$$z = |r_0| = \frac{r^2}{|D \sin \varphi - r|} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7\,b)$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$z^2 (x^2 + y^2 - D\,y)^2 - (x^2 + y^2)^3 = 0 \quad (z \geqq 0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Diese Fläche sechster Ordnung enthält für $y = 0$ das Geradenpaar $z = |x|$ und, gemäß der Unbestimmtheit in P, als weitere Gerade die z-Achse.

Die Betrachtung der Parameterkurven, der achsennormalen Schnitte usw. ergeben weitere Einzelheiten über den Aufbau der Fläche.

8. Parameterkurven. a) $\varphi = \text{konst.}$ Die zur x-y-Ebene senkrechten Ebenen $\varphi = \text{konst.}$ schneiden aus der r_0-Fläche neben der z-Achse noch die Hyperbeläste $z = \frac{r^2}{|D^* - r|}$ aus, wenn hierfür r als unabhängig Veränderliche angesehen wird (Kurve I, Abb. 5). Diese haben außer $r = D^*$ noch die Geraden $z = \pm (r + D^*)$ als Asymptoten, welche durch den Rückkehrkreis gehen[*]). In den Punkten $r = 0$ und $r = 2\,D^*$ liegen Minima mit den Krümmungsradien $0{,}5\,D^*$ für die Hyperbeln und den Werten $z = 0$ bzw. $z = 4\,D^*$ vor. Für $\varphi = 0$ entarten die Hyperbeln in die z-Achse und die Geraden $z = |x|$. Die Fläche nähert sich also asymptotisch dem Kreiszylinder über dem Wendekreis, durchsetzt sich selbst in der z-Achse, schneidet die x-z-Ebene in zwei Geraden und nähert sich für große Werte r der von den Asymptoten $z = \pm (r + D^*)$ gebildeten Fläche (vgl. Abs. 11).

b) $|r| = \text{konst.}$ Die auf den Zylindern $x^2 + y^2 = \bar{r}^2$ gelegenen Kurven $|r| = \bar{r} = \text{konst.}$ durchdringen die r_0 — Fläche in einer räumlichen Kurve, die sich in die z-y-Ebene als die

[4]) Mit einem singulären Punkt in M_w für das imaginäre Argument $\beta = 0{,}5 \cdot \text{arc}\cos 3$.

[5]) Der Gedanke, die Beziehung zwischen r_0 und der bewegten Ebene durch eine Fläche darzustellen, wurde, unabhängig vom Verf., diesem brieflich gegenüber von Herrn Gaßner, Berlin-Adlershof, ebenfalls geäußert.

[*]) In der bei Eingang dieser Arbeit (Juli 1936) noch nicht vorliegenden Mitteilung von Rauh: Hubbewegungen mit 2 Stillständen. Reuleaux-Mittg. 5, 273 bis 276 (1937), finden diese Hyperbeln praktische Anwendung.

gleichseitigen Hyperbeläste $z \cdot (D y - \bar{r}^2) = \bar{r}^3$ für $-\bar{r} \leq y \leq \bar{r}$ mit den Asymptoten $z = 0$ und $y = \bar{r}^2 : D$ (nur Sinn für $\bar{r} \leq D$) und in die z-x-Ebene als die Kurve vierter Ordnung

$$D^2 z^2 (x^2 - \bar{r}^2) + \bar{r}^4 (\bar{r}^2 + z^2) = 0$$

projiziert. Die erstere Projektion ist in Abb. 5, die jetzt für $\varphi = 90^0$, d. h. $D^* = D$ gelten soll, unter „II" für $\bar{r} = 3\,D$ eingetragen.

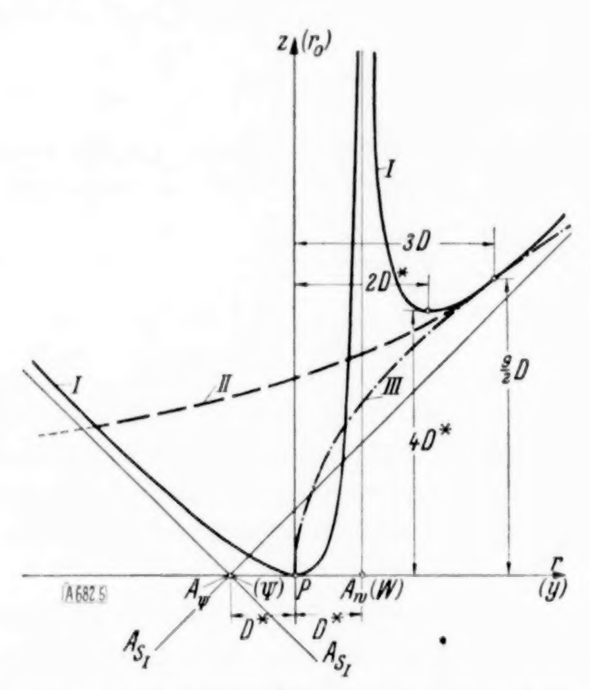


Abb. 5. Meridianschnitt („I") φ = konst. der Krümmungsfläche. — Für $\varphi = 90^0$, d. h. $D = D^*$ stellen „II" bzw. „III" die Projektionen der Kurve $|r|$ = konst. bzw. d = konst. der Krümmungsfläche dar.

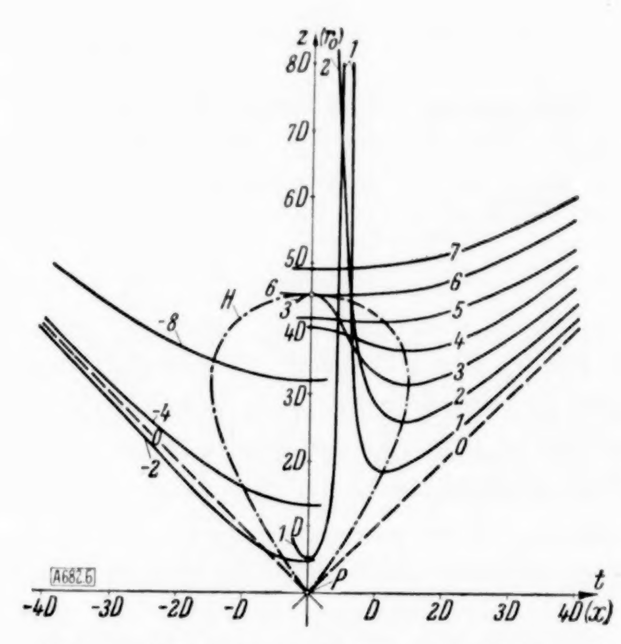


Abb. 6. Schnitte der Krümmungsfläche mit den Ebenen $y = b$ = konst. (Die Zahlen geben die Werte m in $b = \frac{m}{2} D$ an, links für $m < 0$, rechts für $m > 0$.) — „H" vgl. Text.

c) Kreise d = konst. Auf den die Polbahntangenten in P berührenden Kreisen $r = d \cdot \sin \varphi$ (Abs. 2), d. h. räumlich auf den die x-z-Ebene in der z-Achse berührenden Kreiszylindern haben die Krümmungsradien einen sinusförmigen Verlauf gemäß $z = \bar{d} \sin \varphi$, wenn $\bar{d} = \frac{d^2}{D - d}$. Die Durchdringungskurve eines solchen Zylinders mit der r_0-Fläche projiziert sich in die z-y-Ebene als das Parabelstück $z^2 = \bar{d}^2 \cdot \frac{y}{d}$, das in Abb. 5 in Kurve „III" für $d = 3\,D$ dargestellt ist, und in die z-x-Ebene als die Kurve vierter Ordnung $z = \bar{d} \sin \varphi$, $x = d \sin \varphi \cos \varphi$ oder mit $\sigma = \frac{D}{d} - 1$:

$$x^2 = \sigma^2 z^2 \left(1 - \sigma^2 \left(\frac{z}{d}\right)^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

welche in Abb. 6 durch „H" für $d = 3\,D$ dargestellt ist.

Diese Raumkurve ist übrigens zugleich die Durchdringungskurve des Zylinders $r = d \sin \varphi$ (und z. T. der r_0-Fläche) mit dem geraden Kreiskegel, dessen Achse die z-Achse und dessen halber Öffnungswinkel α durch $\operatorname{tg} \alpha = |\sigma|$ gegeben ist[6]).

Der durch die Parabel definierte parabolische Zylinder trifft die Fläche in drei solcher Raumkurven, von denen zwei imaginär sein können (vgl. den Meridianschnitt $\varphi = 90^0$ in Abb. 5). Für $d = 3\,D$ berührt die Parabel diesen Meridianschnitt ($y = 3\,D$, $x = 0$, $r_0 = 4{,}5\,D$) und hat der Parabelparameter in Abhängigkeit von d ein Minimum.

Ein weiterer Sonderfall ($d = 2\,D$), der Ort der Punkte horizontaler Tangenten der Kurven φ = konst. wird uns unten (Abs. 9c u. Abs. 10) begegnen.

9. Achsennormale Schnitte. Wichtig sind ferner die Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen, wobei die Ebenen x = konst. und y = konst. den funktionalen Verlauf von r_0 auf diesen Geraden der x-y-Ebene zeigen. So liefern die Schnitte

a) x = konst. durch Einsetzen von $x = a$ = konst. in Gl. (8) Kurven sechster Ordnung, die außer den Asymptoten $y = R \pm \sqrt{R^2 - a^2}$, d. h. den Schnittlinien mit dem Wendekreis-

[6]) Für einen gegebenen Wert $|\sigma|$ trifft der Kreiskegel die r_0-Fläche in zwei dieser Kurven und zwar für $d = D : (1 \pm \sigma)$.

zylinder (reell für $|a| \leq R$) noch die Asymptoten $z = \pm (y + D)$ haben; diese liegen bzw. in der Ebene, die mit der x-y-Ebene den Winkel $\pm 45^0$ bildet, zu t parallel ist und durch den Rückkehrpol geht. — Symmetrisch sind demgegenüber die zur y-Achse senkrechten Schnitte

b) $y =$ konst. $= b$, d. h. Kurven sechster Ordnung

$$z^2 = \frac{(x^2 + b^2)^3}{(x^2 - x_a^2)^2}, \quad \text{wo} \quad x_a^2 = b\,(D - b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

die in Abb. 6 veranschaulicht sind. Die Geraden $x = x_a$ $(0 < b < D)$, d. h. die Schnittgeraden mit dem Wendekreiszylinder, und die Geraden $z = |x|$ sind ihre Asymptoten. Ferner liegen außer auf der z-Achse die Punkte mit x-paralleler Tangente noch auf der bereits oben (Abs. 8c) in Gl. (9) dargestellten, für $d = 3\,D$ gültigen Kurve vierter Ordnung, d. h. auf der Raumkurve $r = 3\,D \sin\varphi$, $z = 4{,}5\,D \sin\varphi$ (Kurve H[7]), Abb. 6). Für $b = 3\,D$ fallen die Extrema zusammen, die b-Kurve hat einen Flachpunkt in $x = 0$, $z = 4{,}5\,D$. — Die zur x-y-Ebene parallelen Schnitte

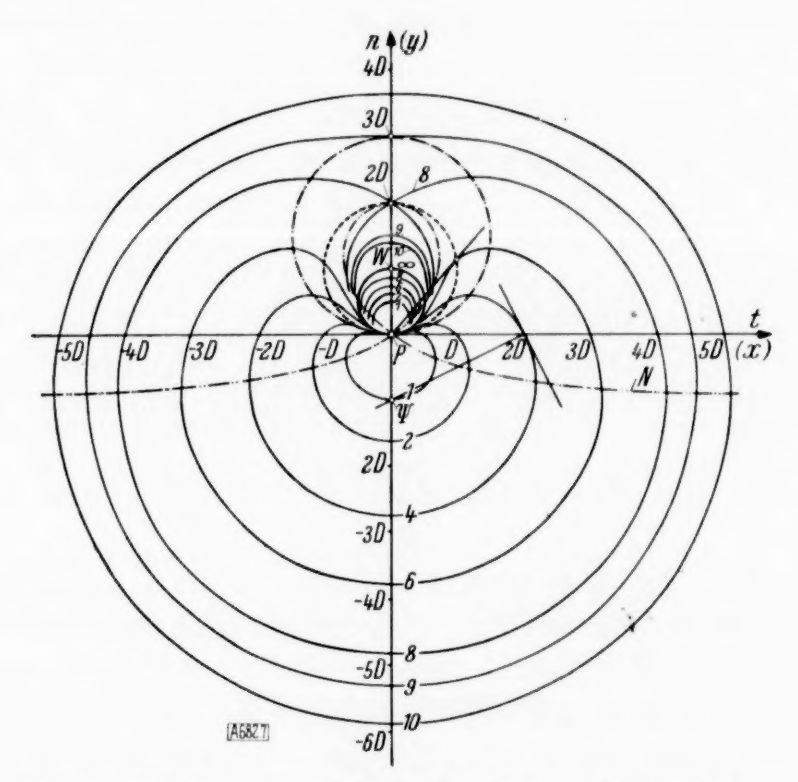


Abb. 7. Schnitte der Krümmungsfläche mit den Ebenen $z = r_0 =$ konst. (Orte konst. Krümmung). — Die Zahlen geben die Werte m in $r_0 = \frac{m}{2} D$ an. — „N" vgl. Text.

c) $z =$ konst. $= r_0$ schneiden aus der r_0-Fläche die bereits von H. Alt [L 5] behandelten trizirkularen Kurven sechster Ordnung

$$r_0^2\,(x^2 + y^2 - D\,y)^2 - (x^2 + y^2)^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

aus, welche als Kurven der x-y-Ebene der geometrische Ort konstanter Krümmung sind und die in Polarkoordinaten geschrieben werden können:

$$r = \pm \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 + r_0\,D^*}, \quad \text{wo} \quad D^* = D \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Ihre geometrischen Eigenschaften als Kurven der x-y-Ebene brauchen, da bekannt [L 5], nicht wiederholt zu werden. Ihren Verlauf[8]) zeigt Abb. 7, in die noch der Ort mit n-parallelen Tangenten, die Kurve dritter Ordnung

$$x^2\,(y + D) - y^2\,(2\,D - y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

unter „N" eingetragen ist.

Räumlich jedoch ergibt sich: Die Punkte mit t-parallelen Tangenten liegen auf der bereits mehrfach erwähnten Durchdringungskurve des Zylinders $r = 3\,D \cdot \sin\varphi$ mit der r_0-Fläche (Flachpunkt in $x = 0$, $y = 3\,D$ für $r_0 = 4{,}5\,D$). Ferner erfüllen die Berührungspunkte

[7]) D. i. Kurve III der Abb. 5.
[8]) Innerhalb w nur z. T.

der von den Punkten $z = r_0$ der z-Achse an die zugehörigen r_0-Kurven gezogenen Tangenten die Durchdringungskurve mit dem Zylinder $r = 2\,D \cdot \sin \varphi$, welche Kurve ja zugleich der Ort der Scheitel der Meridiankurven $\varphi =$ konst. war. Schließlich bilden diese zur x-y-Ebene parallelen Tangenten, auf denen $\sin \varphi = \frac{r_0}{4\,D}$, eine Regelfläche $r \cdot z = D \cdot y$, die von den Zylindern $|r| = \bar{r}$ $=$ konst. in je zwei Ellipsen einfacher Lage geschnitten wird. Weitere Aufschlüsse ergeben

10. Tangentialebenen und Normalen. Aus den hier nicht angegebenen Koordinaten der Schnittpunkte der Tangentialebenen mit den Achsen folgt, daß diese für $\varphi = 0$ naturgemäß durch die Geraden $z = |x|$ gehen und auf der vom Wendepol zum Punkt $z = |x|$ der z-Achse gezogenen Geraden senkrecht stehen; ferner treffen die Tangentialebenen für die unendlich fernen Punkte der Fläche, d. h. für $r = \infty$ die x-y-Ebene jeweils in der Senkrechten vom Rückkehrpol auf den durch P unter dem Winkel φ gezogenen Strahl und bilden mit dieser Ebene einen Winkel von $\pm 45^0$. Auf dem Zylinder $r = 3\,D \cdot \sin \varphi$ sind, wie zu erwarten (Abb. 5 bis 7), die berührenden Ebenen parallel der x-Achse, und ebenso hat man n- oder y-parallele Berührungsebenen in den Punkten, wo auch die r_0-Kurven (Abb. 7) n-parallele Tangenten haben.

Die Normalen sind durch ihre Spurpunkte S_1, S_2, S_3 mit den x, y-, y, z-, z, x-Ebenen bzw. bestimmt, deren hier nicht angegebenen Koordinaten für $\varphi = 0$ die einfachen Werte $X_1 = 2\,r$, $Y_1 = D$; $Y_2 = -D$, $Z_2 = 2\,r$; $Z_3 = X_3 = r$ liefern, so daß die Normalen des Schnittes der r_0-Fläche mit der x-z-Ebene zwei Sattelflächen bilden, deren Erzeugende durch die z-Parallele im Rückkehrpol, durch die Wendekreistangente in W und durch die Geraden $z = x$ der x-z-Ebene gehen und deren Gleichung durch $Z \cdot (D + Y) = X \cdot (D - Y)$ beiläufig gegeben ist. Dies ist die flächentheoretische Deutung dafür, daß die Normalen der r_0-Kurven (als Kurven der x-y-Ebene) in ihren Schnittpunkten mit der Polbahntangenten durch den Rückkehrpol gehen (Abb. 7 [L 5]).

Die Flächennormalen auf den Schnittkurven $z = r_0 =$ konst. treffen die z-y-Ebene in Kurven dritter Ordnung $Z = r_0 \left(1 + \frac{y}{D}\left(\frac{D - 2\,y}{3\,y}\right)^3\right)$, die, wie der Faktor r_0 anzeigt, ähnlich sind, während die Flächennormalen der Kurven $d =$ konst. die z-y-Ebene in einer Strecke und die x-y-Ebene in einem Kreis treffen.

Hinsichtlich der Krümmung sei nur erwähnt, daß für $\varphi = 90^0$ und $r = y = 3\,D$ die Gaußsche Krümmung k (wie nach obigem zu erwarten) verschwindet, dort also ein parabolischer Flächenpunkt vorliegt, und daß für $\varphi = 90^0$ und $r = y = 2\,D$ (Minimum der Hyperbel, Abb. 5) die Hauptkrümmungsradien sich zu $R_1 = -R$ (Hyperbel) und $R_2 = D = 2\,R$ ergeben.

11. Die Asymptotenfläche. Diese von den Asymptoten der Meridianhyperbeln $\varphi =$ konst. gebildete, zur x-y-Ebene symmetrische Regelfläche vierter Ordnung hängt nur lose mit dem betrachteten Problem zusammen, besitzt jedoch einige kinematische und differentialgeometrische Eigenschaften, die nicht unerwähnt bleiben sollen. Nach ihrer Gleichung

$$z = \pm (r + D \cdot \sin \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

(vgl. Abs. 8a und Abb. 5) enthält sie den Rückkehrkreis und das Stück $z = \pm D \cdot \sin \varphi$ der z-Achse und wird von dem Zylinder $|r| = \bar{r} =$ konst. (Abs. 8b) in je zwei Ellipsen konstanter linearer Exzentrizität D vom Mittelpunkt $z = \pm \bar{r}$ getroffen, deren Ebenen bzw. senkrecht stehen auf den vom Wendepol zu ihrem Mittelpunkt gezogenen Strahl. Für die Schichtlinien $z =$ konst. $= \bar{z}$ erhält man gemäß der Polardarstellung $r = -D \cdot \sin \varphi \pm \bar{z}$. Pascalsche Kurven, die geschweift, gespitzt, verschlungen je nachdem $|\bar{z}| \gtreqless 0$, wie auch aus der kinematischen Erzeugung mit einer symmetrischen Kurbelschleife (Umkehr der Kardanbewegung) folgt: Zwei sich senkrecht schneidende, in den durch die z-Achse gehenden Ebenen gelegene Geraden, d. h. die Asymptoten werden so bewegt, daß ihr Schnittpunkt A_φ (Abb. 5) auf dem Rückkehrkreis geführt wird, während ihre in der x-y-Ebene gelegene Winkelhalbierende durch den festen Punkt P gleitet.

Da die Gaußsche Krümmung k auf dem Meridianschnitt $\varphi = 90^0$ verschwindet, folgen für die Krümmungsradien der zur Geraden $z = \pm (D + y)$ senkrechten Normalschnitte einfache Werte, so daß im Rückkehrpol (geometrisch leicht deutbar) $R_2 = R \cdot \sqrt{2}$ und über dem Wendepol $R_2 = \infty$ wird. Die Pascalsche Kurve hat dort zudem, da $\bar{z} = 2\,D$, einen Flachpunkt (d. h. den Ballschen Punkt der „Getriebelage", vgl. a. [L 7]).

C. Sonderfälle.

12. Pol unendlich fern. Wenn der Momentanpol in einer häufig vorkommenden Getriebelage nicht mehr im Endlichen liegt, wie bisher angenommen, sondern im Unendlichen, so gilt die Euler-Savarysche Formel nicht mehr ohne weiteres, wenn auch die Bobillierschen Konstruktionen sich sinngemäß umdeuten lassen [L 3]. Nimmt man dann wieder die mit dem Wendekreis zusammenfallende Polbahntangente als x-Achse und in einem beliebigen Punkt senkrecht dazu die y-Achse an, so gilt für den Krümmungsradius eines Punktes: $r_0 = \frac{q^2}{y}$, wobei q für den betrachteten Augenblick konstant ist [L 4], [L 5]. Danach bilden sich die x-parallelen Geraden in sich selbst ab, die y-parallelen Geraden jedoch in gleichseitige, kongruente Hyperbeln mit t als gemeinsamer Asymptote. Sonach entartet die Krümmungsfläche in einen hyperbolischen Zylinder, dessen Mantellinien parallel t.

13. Mehrpunktige Berührung. Der einfachste Fall einer mehrpunktigen Berührung tritt ein, wenn Wendepol W und Momentanpol P zusammenfallen (im allgemeinen Drehung um eine feste, die z-Achse). Dann bilden sich sämtliche Punkte in den Momentanpol ab, und die Krümmungsfläche entartet, wie leicht geometrisch einzusehen oder aus Gl. (8) für $D = 0$ zu folgern ist, in einen Kreiskegel mit der Spitze P, dem Öffnungswinkel 90° und der z-Achse als Drehachse.

Von diesem Sonderfall abgesehen, erfüllen die Punkte mit mindestens vierpunktig berührendem Krümmungskreis bekanntlich die Kreispunktkurve (Bezeichnung nach [L 3]), deren Bild in der u-v-Ebene die Mittelpunktkurve oder die Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung ist [L 3]. Über der Kreispunktkurve hat die Krümmungsfläche keine Besonderheiten, es sei denn, daß diese Kurve in eine Gerade und einen Kreis (vgl. [L 7]) oder bei unendlich fernem Pol in die unendlich ferne Gerade und eine gleichseitige Hyperbel zerfällt (R. Müller).

Schließlich kann auch die vom Momentanpol als Punkt der bewegten Ebene beschriebene Bahnkurve einen fünf- oder mehrpunktig berührenden Krümmungskreis, d. h. eine Schnabelspitze [L 8, 9, 10] besitzen. Dann gehört für diesen Sonderfall kinematisch nur ein Punkt der z-Achse, jedoch nicht der Pol zur Krümmungsfläche. Daher die schon oben erwähnte Unbestimmtheit der Fläche für $r = 0$.

14. Zusammenfassung. Es wurde die durch die Euler-Savarysche Formel gegebene Abbildung der bewegten auf die feste Ebene analytisch untersucht, insbesondere die Abbildung einfacher Kurven und die hiermit in Verbindung stehenden geometrischen Örter verfolgt. Ferner wurde die jedem Punkt eigene Krümmung betrachtet und durch den als räumliche Koordinate aufgefaßten Krümmungshalbmesser dargestellt, so daß der Krümmungsverlauf durch eine Krümmungsfläche veranschaulicht wird. Diese wurde im einzelnen mit kurzem Hinweis auf ihre Asymptotenfläche behandelt. Die Betrachtung von Sonderfällen schloß die Untersuchung. 682

Schrifttum.

[L 1] Burmester: Lehrbuch der Kinematik (1888), S. 117.
[L 2] W. Meyer zur Capellen: Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Umlaufrädertrieben. Reuleaux-Mittg., Bd. 4 (1936), 577 bis 580.
[L 3] Reinhold Müller: Einf. i. d. theor. Kinematik. Berlin 1932.
[L 4] W. Meyer zur Capellen: Getriebependel. Ztschr. f. Instrkde, Bd. 55 (1935), 393 bis 407, 437 bis 448.
[L 5] H. Alt: Zur Geometrie der Koppelrastgetriebe. Ing.-Arch., Bd. 3 (1932), 394 bis 411.
[L 6] Blaschke: Differentialgeometrie; Lagally, Vektorenrechnung.
[L 7] W. Meyer zur Capellen: Die kinematische Erzeugung des n-Ecks mit abgerundeten Ecken. Reuleaux-Mittg., Bd. 4 (1936), 44 bis 47.
[L 8] Reinhold Müller: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Braunschweig 1897.
[L 9] W. Meyer zur Capellen: Der Momentanpol als Burmesterscher Punkt. Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 41 (1934), 285 bis 299.
[L 10] Ders.: Eine besondere Form der Koppelkurve. Reuleaux-Mittg., Bd. 3 (1935), 401 bis 402.

Über die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichungen.

Von *E. Pflanz* in Stuttgart.

In seiner Dissertation hat Herr Collatz u. a. gezeigt, wie man die numerische Lösung von linearen Differentialgleichungen dadurch beschleunigen kann, daß man die darin auftretenden Differentialquotienten durch sogenannte „finite Ausdrücke" ersetzt. Unter einem finiten Ausdruck versteht man eine lineare Kombination der Funktionswerte in festgegebenen Punkten. Im Falle äquidistanter Punkte bezeichne h deren Abstand. Es sei bemerkt, daß die gewöhnlich benützten Differenzenquotienten spezielle finite Ausdrücke sind und daß die gesuchten finiten Ausdrücke die betreffenden Differentialquotienten in h von höherer Ordnung annähern sollen, als dies die üblichen Differenzenquotienten tun. Näheres hierüber findet man in den am Schlusse erwähnten Collatzschen Arbeiten. Von Collatz wurden solche finiten Ausdrücke bestimmt; im Falle einer unabhängigen Variabeln wurde eine explizite Darstellung, die eine Annäherung beliebig hoher Ordnung ermöglicht, aber nur für die erste und zweite Ableitung einer Funktion angegeben.

Im folgenden wird auf anderem Wege wie bei Collatz für den allgemeinen Fall der m-ten Ableitung einer Funktion einer Variabeln ein finiter Ausdruck in expliziter Form bestimmt werden. Für $m=1$ und $m=2$ ergeben sich aus unserer Darstellung die von Collatz angegebenen finiten Ausdrücke. Die Gl. (1) bis (4) zeigen, daß wir mit unseren finiten Ausdrücken in h eine Annäherung beliebig hoher Ordnung erzielen können. Wir brauchen (bei festem λ) ja nur p genügend groß zu wählen.

Das **Ergebnis** lautet: Es seien $h>0$, λ und p positiv ganzzahlig, $\lambda \leq p$. Die Funktion $u(x)$ sei in $-ph \leq x \leq ph$ bis zur $(2p+2)$ten Ordnung stetig differenzierbar. Es bedeute $u_\mu = u(x_\mu)$, $x_\mu = \mu \cdot h$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm p$. C_k bezeichne die Summe über die Kombinationen der p Elemente $\frac{1}{v^2}$ $(v = 1, 2, \ldots p;\ 1 \leq k \leq p)$ ohne Wiederholung zur k-ten Klasse. Weiter sei $f(\lambda, p, \varrho) = 1 - \varrho^2 C_1 + \varrho^4 C_2 - \cdots\cdots + (-1)^{\lambda-1} \varrho^{2(\lambda-1)} C_{\lambda-1}$ mit $f(1, p, \varrho) = 1$.

Dann gilt für $1 \leq \lambda \leq p$

$$u^{(2\lambda-1)}(0) = \frac{(2\lambda-1)!}{h^{2\lambda-1}} p!^2 \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{(-1)^{\varrho+1} \cdot f(\lambda, p, \varrho)}{\varrho^{2\lambda-1}(p-\varrho)!(p+\varrho)!}(u_\varrho - u_{-\varrho}) + R_{2\lambda-1}(\lambda, p) \quad . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$u^{(2\lambda)}(0) = \frac{(-1)^\lambda (2\lambda)!}{h^{2\lambda}} \cdot C_\lambda u_0 + \frac{(2\lambda)!\, p!^2}{h^{2\lambda}} \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{(-1)^{\varrho+1} f(\lambda, p, \varrho)}{\varrho^{2\lambda}(p-\varrho)!(p+\varrho)!}(u_\varrho + u_{-\varrho}) + R_{2\lambda}(\lambda, p) \quad (2).$$

Für die Restglieder $R_{2\lambda-1}$, $R_{2\lambda}$ ergibt sich (durchweg sei $|\vartheta| \leq 1$)

$$R_{2\lambda-1}(\lambda, p) = \vartheta \frac{h^{2p+1-(2\lambda-1)}}{(2p+1)!} \operatorname{Max} |u^{(2p+1)}_{-ph \leq x \leq ph}| \cdot (2\lambda-1)!\, 2\, p!^2 \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{|f(\lambda, p, \varrho)| \cdot \varrho^{2p+1-(2\lambda-1)}}{(p-\varrho)!(p+\varrho)!} \quad (3),$$

$$R_{2\lambda}(\lambda, p) = \vartheta \frac{h^{2p+2-2\lambda}}{(2p+2)!} \operatorname{Max} |u^{(2p+2)}_{-ph \leq x \leq ph}| \cdot (2\lambda)!\, 2\, p!^2 \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{|f(\lambda, p, \varrho)| \cdot \varrho^{2p+2-2\lambda}}{(p-\varrho)!(p+\varrho)!} \quad . \; . \quad (4).$$

Tabelle für die C_k.

p	C_1	C_2	C_3	C_4
1	1	—	—	—
2	5/4	1/4	—	—
3	49/36	7/18	1/36	—
4	205/144	91/192	5/96	1/576
5	5269/3600	1529/2880	341/4800	11/2880

Beweis.

1. Die Funktion $u = u(x)$ sei für $-ph \leq x \leq ph$ mindestens $(2p+2)$ mal stetig differenzierbar. Es sei $h > 0$, p positiv ganz. Gegeben seien die Funktionswerte u_μ an den Stellen $x_\mu = \mu h$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm p$.

Unser Ziel ist, $u^{(m)}(0)$ angenähert darzustellen durch die $u_\mu \cdot (1 \leq m \leq 2p)$. Wir legen durch die Punkte (x_μ, u_μ) die Parabel $2p$-ter Ordnung $P(x)$. Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel ist

$$P(x) = \sum_{\varrho=-p}^{p} P_\varrho \cdot u_\varrho, \qquad \text{wo } P_\varrho = \prod_{\mu=-p}^{\mu=p}{}' \frac{x - x_\mu}{x_\varrho - x_\mu} = \frac{M}{N} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$'$ besagt, daß das Produkt zu bilden ist für $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm p$ mit Ausnahme von $\mu = \varrho$.

Ersichtlich ist P_ϱ ein Polynom in x vom Grade $2p$. Für jedes $P_\varrho (\varrho = 0, \pm 1, \ldots, \pm p)$ berechnet man den Koeffizienten $K_m(\varrho, p)$ von x^m. Dann ist

$$P^{(m)}(0) = m! \sum_{\varrho=-p}^{p} K_m(\varrho, p) \cdot u_\varrho \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Wir nehmen $P^{(m)}(0)$ als **finiten Ausdruck für $u^{(m)}(0)$**, setzen also

$$u^{(m)}(0) = m! \sum_{\varrho=-p}^{p} K_m(\varrho, p) \cdot u_\varrho + \text{Restglied } R \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

2. **Berechnung von $K_m(\varrho, p)$.** Ohne weiteres ergibt sich in (5):

$$N = (-1)^{p+\varrho} (p+\varrho)!\,(p-\varrho)!\,h^{2p} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

a) Es sei $\varrho \neq 0$. Mit $\zeta = \frac{x}{h}$ und $\zeta_\mu = \mu$, $\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm p$ wird in (5)

$$M = h^{2p} \zeta \prod_{\mu=-p}^{p}{}' (\zeta - \zeta_\mu), \; \mu \neq \varrho \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Um $K_m(\varrho, p)$ zu erhalten, bestimmen wir den Koeffizienten $\mathfrak{K}_{m-1}(\varrho, p)$ von ζ^{m-1} in $\prod_{\mu=-p}^{p}{}' (\zeta - \zeta_\mu)$.
Dann ist nach (5), (8), (9)

$$K_m(\varrho, p) = (-1)^{p+\varrho} \frac{1}{h^m (p-\varrho)!\,(p+\varrho)!} \mathfrak{K}_{m-1} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Es bedeute $\Sigma' \zeta_{\mu_1} \zeta_{\mu_2} \ldots \zeta_{\mu_k}$ die Summe über alle Kombinationen der Elemente $\zeta_\mu = \mu$, $\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm p$ mit Ausnahme von $\mu = \varrho$ zur k-ten Klasse ohne Wiederholung.

Für $1 \leq m \leq 2p$ ist

$$\mathfrak{K}_{m-1}(\varrho, p) = (-1)^m \Sigma' \zeta_{\mu_1} \zeta_{\mu_2} \ldots \zeta_{\mu_{2p-m}} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\text{mit } \Sigma' = 1 \text{ für } m = 2p$$

und für $2 \leq m \leq 2p$

$$\mathfrak{K}_{m-1}(\varrho, p) = (-1)^{p+m} \frac{p!^2}{\varrho} \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)} \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

wenn wir zur Abkürzung $\sum' \frac{1}{\zeta_{\mu_1} \zeta_{\mu_2} \ldots \zeta_{\mu_{m-1}}} = \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}$, $\mu_k \neq \varrho$ setzen.

Somit ergibt sich aus (10) und (12)

$$K_m(\varrho, p) = \frac{(-1)^{\varrho+m} p!^2}{h^m \cdot \varrho\,(p-\varrho)!\,(p+\varrho)!} \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}, \quad 2 \leq m \leq 2p \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Aus (10) und (11) erhält man für $m=1$ sofort

$$K_1(\varrho, p) = \frac{(-1)^{\varrho+1} p!^2}{\varrho\,(p+\varrho)!\,(p-\varrho)!\,h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Es sei $\varrho' = -\varrho$, dann folgt aus (11) für $1 \leq m \leq 2p$

$$\mathfrak{K}_{m-1}(-\varrho, p) = (-1)^m\, \mathfrak{K}_{m-1}(\varrho, p),$$

also ist wegen (10)

$$K_m(-\varrho, p) = (-1)^m K_m(\varrho, p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Berechnung von $\sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}$ für $2 \leq m \leq 2p$.

Es bedeute $\sum_k = \sum \frac{1}{\zeta_{\mu_1}\zeta_{\mu_2}\ldots\zeta_{\mu_k}}$ die Summe aller Kombinationen ohne Wiederholung der $2p$ Elemente $\zeta_\mu = \mu$, $\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm p$, also einschließlich $\mu = \varrho$, zur k-ten Klasse.

Dann ist ersichtlich

$$\sum_k = \frac{1}{\varrho} \sum_{k-1}{}'^{(\varrho)} + \sum_k{}'^{(\varrho)}, \qquad 2 \leq k \leq 2p.$$

Hieraus folgt unter Beachtung von $\sum_1{}'^{(\varrho)} = -\frac{1}{\varrho}$

$$\sum_k{}'^{(\varrho)} = \frac{1}{\varrho^k}\left\{\varrho^k \sum_k - \varrho^{k-1}\sum_{k-1} + \varrho^{k-2}\sum_{k-2} - + \cdots + (-1)^{k-2}\varrho^2 \sum_2 + (-1)^k\right\} \quad (16).$$

C_k bedeute die Summe der Kombinationen der Elemente $\frac{1}{\mu^2}$ $(\mu = 1, 2 \ldots p)$ zur k-ten Klasse ohne Wiederholung. Aus dem Zusammenhang von $\sum_l$ mit dem Koeffizienten von ζ^{2p-l} im Polynom $\prod_{\mu=1}^{p}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_\mu}\right)$ kann man folgern, daß für $1 \leq l \leq 2p$

$$\sum_l = (-1)^k C_k, \quad \text{falls } l \text{ gerade}, \quad l = 2k, \qquad \sum_l = 0, \quad \text{falls } l \text{ ungerade} \quad (17).$$

Somit erhält man nach (16) und (17) für den in (13) auftretenden Faktor $\sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}$ $(2 \leq \lambda \leq p)$

$$\sum_{m-1}{}'^{(\varrho)} = \frac{1}{\varrho^{2\lambda-2}} f(\lambda, p, \varrho) \qquad \text{für } m = 2\lambda - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

und

$$\sum_{m-1}{}'^{(\varrho)} = -\frac{1}{\varrho^{2\lambda-1}} f(\lambda, p, \varrho) \qquad \text{für } m = 2\lambda \,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

wo

$$f(\lambda, p, \varrho) = 1 - \varrho^2 C_1 + \varrho^4 C_2 - + \cdots + (-1)^{\lambda-1}\varrho^{2\lambda-2} C_{\lambda-1}$$

ist. Wie man aus (13) für $m=2$ und aus (14) für $m=1$ ersieht, gelten (18) und (19) in Verbindung mit (13) auch für $\lambda = 1$, wenn wir $f(1, p, \varrho) = 1$ setzen.

b) Es sei $\varrho = 0$. Mit $\zeta = \frac{x}{h}$, $\zeta' = \zeta^2$, $a_i = i^2$, $i = 1, 2, \ldots p$ ist

$$P_0 = (-1)^p \frac{1}{p!^2} \prod_{i=1}^{p} (\zeta' - a_i) \qquad (20).$$

Aus (20) erhält man entsprechend wie bei (17) für $1 \leq m \leq 2p$

$$K_m(0, p) = 0 \text{ für ungerades } m; \qquad K_m(0, p) = (-1)^{m/2} \frac{1}{h^m} C_{m/2} \text{ für gerades } m.$$

Setzen wir $m = 2\lambda$, bzw. $m = 2\lambda - 1$, so erhalten wir schließlich die Gl. (1) und (2), wenn wir in (7) die Werte K_m von (13), (14) unter Beachtung von (15), (18), (19) einsetzen.

3. **Abschätzung des Restgliedes in (1) und (2).** Die Taylorentwicklung von $u(x)$ um $x = 0$ laute

$$u(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m + \cdots + A_{2p} x^{2p} + R' \qquad (21),$$

wo

$$R' = \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} u^{(2p+1)}(\vartheta x), \quad |\vartheta| = |\vartheta(x)| \leq 1.$$

Die Darstellung des Polynomes $P(x)$ sei

$$P(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m + \cdots + B_{2p} x^{2p}.$$

Es ist abzuschätzen (siehe (6) und (7))

$$R = u^{(m)}(0) - P^{(m)}(0) = m!(A_m - B_m), \qquad 1 \leq m \leq 2p \qquad (22).$$

Setzt man

$$u^{(2p+1)}(\vartheta_\mu \cdot \mu h) = u_\mu^{(2p+1)}, \qquad |\vartheta_\mu| \leq 1,$$

so erhält man wegen $P(x_\mu) = u(x_\mu) = u_\mu$, $x_\mu = \mu h$, $\mu = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots \pm p$ für $(A_m - B_m)$ das System der $2p$ Gleichungen

$$\varrho = 1, 2, \ldots p \left\{ \begin{aligned} &(A_1 - B_1)(\varrho h) + (A_2 - B_2)(\varrho h)^2 + \cdots + (A_m - B_m)(\varrho h)^m \\ &\qquad + \cdots + (A_{2p} - B_{2p})(\varrho h)^{2p} = -\frac{(\varrho h)^{2p+1}}{(2p+1)!} u_\varrho^{(2p+1)} \\ &(A_1 - B_1)(-\varrho h) + (A_2 - B_2)(-\varrho h)^2 + \cdots + (A_m - B_m)(-\varrho h)^m \\ &\qquad + \cdots + (A_{2p} - B_{2p})(-\varrho h)^{2p} = -\frac{(-\varrho h)^{2p+1}}{(2p+1)!} u_{-\varrho}^{(2p+1)} \end{aligned} \right\} \qquad (23).$$

Löst man dieses System nach $(A_m - B_m)$ auf, so erhält man nach Vereinfachung der auftretenden Zählerdeterminante und deren Entwicklung nach den Elementen der Spalte, welche die $u_\varrho^{(2p+1)}$ enthält,

$$A_m - B_m = \frac{(-1)^m \cdot h^{2p+1-m}}{(2p+1)! \prod_{v=1}^{2p} v!} \cdot \sum_{\varrho=1}^{p} \varrho^{2p+1} \left(D_m(\varrho, p) u_\varrho^{(2p+1)} + D_m(-\varrho, p) \cdot u_{-\varrho}^{(2p+1)} \right) \qquad (24).$$

In (24) ist $D_m(\varrho, p)$ eine Determinante n-ten Grades von folgender Gestalt (wobei nur ihre $v$te Zeile angeschrieben werde)

$$D_m(\varrho, p) = | y_v \, y_v^2 \ldots y_v^{m-1} \, y_v^{m+1} \ldots y_v^{n+1} |, \ldots v = 1, 2, \ldots n \qquad (25).$$

In unserem Falle sind die Elemente $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Zahlen $+1, -1, +2, -2, \ldots +p, -p$ mit Ausnahme einer herausgegriffenen ganzen Zahl ϱ, $1 \leq |\varrho| \leq p$. Weiter ist $n = 2p - 1$.

Es läßt sich unschwer zeigen, daß

$$D_m(\varrho, p) = (y_1 y_2 \ldots y_n)^2 \cdot \sum \frac{1}{y_{\mu_1} y_{\mu_2} \ldots y_{\mu_{m-1}}} \cdot \prod_{r>s}^{n} (y_r - y_s) \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

ist für $1 \leq m \leq 2p$, wobei in (26) Σ die Summe der Kombinationen der Elemente $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2} \ldots \frac{1}{y_n}$ zur $(m-1)$ten Klasse ohne Wiederholung bedeutet. Für $m=1$ müssen wir dabei setzen $\Sigma = 1$.

Bei der oben angegebenen Bedeutung der y_v ergibt sich

$$D_m(\varrho, p) = p!^2 \prod_{v=1}^{2p} v! \frac{1}{\varrho(p+\varrho)!(p-\varrho)!} \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und aus (27), (18), (19)

$$D_m(-\varrho, p) = (-1)^m D_m(\varrho, p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

Somit erhält man aus (22), (24), (27), (28) für $1 \leq m \leq 2p$

$$\left.\begin{aligned} & u^{(m)}(0) - P^{(m)}(0) \\ & = (-1)^m \cdot \frac{h^{2p+1-m}}{(2p+1)!} m!\, p!^2 \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{\varrho^{2p} \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}}{(p+\varrho)!\,(p-\varrho)!} \left(u_{\varrho}{}^{(2p+1)} + (-1)^m u_{-\varrho}{}^{(2p+1)}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (29),$$

wo $\sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}$ durch (18) und (19) (unter Beachtung des Zusatzes für $m=1$ und $m=2$) gegeben ist.

Für **gerades** $m = 2, 4 \ldots 2p$ läßt sich für $u^{(m)}(0) - P^{(m)}(0)$ noch eine andere Darstellung gewinnen, wenn man in der Taylorentwicklung (21) von $u(x)$ erst nach x^{2p+1} abbricht, so daß das Restglied R'' von der Form ist

$$R'' = \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} u^{(2p+2)}(\vartheta x), \quad |\vartheta| = |\vartheta(x)| \leq 1.$$

In gleicher Weise wie eben erhält man ein Gleichungssystem für die $(A_m - B_m)$, das sich von (23) nur dadurch unterscheidet, daß rechts neben dem Gliede mit $u_{\varrho}{}^{(2p+2)}$ noch $-A_{2p+1}(\varrho h)^{2p+1}$ steht. Die bei der Berechnung von $A_m - B_m$ auftretende Zählerdeterminante läßt sich in 2 Determinanten zerspalten, von denen diejenige für gerades m verschwindet, bei der A_{2p+1} herausgesetzt werden kann. So erhält man schließlich für **gerades** m, $2 \leq m \leq 2p$

$$u^{(m)}(0) - P^{(m)}(0) = \frac{h^{2p+2-m}}{(2p+2)!} m!\, p!^2 \sum_{\varrho=1}^{p} \frac{\varrho^{2p+1} \sum_{m-1}{}'^{(\varrho)}}{(p+\varrho)!\,(p-\varrho)!} \left(u_{\varrho}{}^{(2p+2)} + u_{-\varrho}^{(2p+2)}\right) \quad . \quad (30),$$

und aus (29) mit $m = 2\lambda - 1$, aus (30) mit $m = 2\lambda$ vollends ohne weiteres die Gl. (3) und (4).
701

Literaturhinweis.

L. Collatz: Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen. Schriften d. math. Semin. u. d. Instit. f. angew. Mathem. d. Univ. Berlin. Bd. 3, Heft 1, 1935.

Betr. weiterer hierhergehöriger Arbeiten desselben Verfassers siehe: Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 14, 1934, S. 350 bis 351, und 16, 1936, S. 239 bis 247.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Geometrie der Korbbögen. Die aus zwei oder mehr stetig ineinander übergehenden Kreisbogenstücken zusammengesetzten Bogenlinien, die Korbbögen, sind zwar nur ein Ersatz für Kurven mit stetig veränderlicher Krümmung, doch werden sie sowohl im Bauwesen als auch im Maschinenbau deshalb gerne angewandt, weil sie mit einer für die Praxis hinreichenden Annäherung an die Form der zu ersetzenden Primärkurve scharf aufgerissen werden können. Es lassen sich auch in den Korbbögen als Wölblinien für Mauerbögen und Gewölbe die senkrecht zur Wölblinie zu richtenden Lagerfugen genau angeben. Doch ist bisher keine grundsätzliche Lösung der Aufgabe bekannt geworden.

I. Ausrundung einer Ecke mit zwei stetig ineinander übergehenden Kreisteilen. Einzellösungen. Es sei, mit Bezugnahme auf Abb. 1, S der Scheitel, A der Berührungspunkt auf dem längeren Schenkel des Winkels der Tangenten an den zu zeichnenden Korbbogen, B der Berührungspunkt desgleichen auf dem kürzeren Schenkel, a und b die entsprechenden Tangentenlängen. Der Mittelpunkt M_a für den in A berührenden Kreisbogen liegt auf der in A errichteten Normalen, der Mittelpunkt M_b für den in B berührenden Kreisbogenteil auf der in B errichteten Normalen. Beide Mittelpunkte liegen auf der gemeinschaftlichen Übergangsnormalen. Der Übergangspunkt sei C.

Wird einer der beiden Mittelpunkte, z. B. M_a gewählt, so findet man den Übergangspunkt C auf folgende Weise: Man schlägt einen Kreis mit dem Halbmesser $R = \overline{A M_a}$, zieht durch M_a eine Parallele zur Normalen in B, welche den eben geschlagenen Kreis in B' schneidet. Die Verbindungsgerade $B' B$ schneidet den Kreis mit dem Halbmesser R in dem gesuchten Übergangspunkt C. Ebensogut hätte man M_b wählen und mit dem Halbmesser $r = \overline{B M_b}$ einen Kreis schlagen können. Eine Parallele zur Normalen in A durch M_b schneidet diesen Kreis in A', die Verbindungsgerade $A A'$ denselben Kreis im gesuchten Übergangspunkt C. Die Konstruktion gründet sich auf die Ähnlichkeit der Sektoren $A M_a C$ mit $A' M_b C$ bzw. $B M_b C$ mit $B' M_a C$.

Die Aufgabe ist übrigens unbestimmt und läßt viele Lösungen zu.

Zwei Grenzfälle sollen erwähnt werden: 1. Ist R unendlich, so wird der Sektorwinkel $C M_b B$ gleich dem Winkel der Normalen. Der Mittelpunkt M_b fällt in den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Tangentenwinkels mit der Normalen in B. Der Übergangspunkt C fällt mit A' zusammen auf die Tangente $S A$ nach D, wobei $\overline{S D} = b$ wird. 2. Ist $r = 0$, so fällt der Mittelpunkt M_a in den Schnittpunkt des Mittellots der Sehne $A B$ mit der Normalen in A.

In allen Fällen wird das Stück $M_a M_b$ der Übergangsnormalen gleich $R - r$.

II. Das Problem wird erst eindeutig, wenn für den Korbbogen die Erfüllung einer weiteren Bedingung vorgeschrieben wird. Um eine solche erfüllen zu können, ist es zweckmäßig, den geometrischen Ort des Übergangspunktes C und die zu einem Übergangspunkt C jeweils gehörige Richtung der Übergangsnormalen zu ermitteln. Man erkennt aus Abb. 1, daß die Geraden AC und BC sich stets unter demselben Winkel schneiden, der gleich dem halben Winkel der Normalen in A und B ist. Der geometrische Ort des Übergangspunktes C ist daher ein Kreis, der durch die Punkte A und B geht und kurz der Ortskreis genannt werden soll. Sein zur Sehne AB gehöriger Zentriwinkel ist gleich dem Winkel der Berührungsnormalen. Von dem Ortskreis sind, wie aus der Betrachtung des Grenzfalles $R = \infty$ hervorgeht, die vier Punkte A, D, B und E bekannt, von denen je zwei auf jeder der beiden Tangenten liegen und die von S je die Abstände a und b haben. Aus Symmetriegründen muß demnach der Mittelpunkt 0 des Ortskreises im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Tangentenwinkels und des Außenwinkels der Berührungsnormalen liegen. Bezüglich der Gesetzmäßigkeit der Richtung der Übergangsnormalen gilt folgendes: Da der Mittelpunkt 0 des Ortskreises sowohl auf der Halbierenden des Winkels $A M_a C$ als auch auf der Halbierenden des Winkels $B M_b C$ liegen muß, ist er auch Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises, das aus den beiden Normalen und der Übergangsnormalen gebildet wird.

Die Übergangsnormale berührt also stets einen Kreis um 0, der auch die Normalen berührt. Dieser kleine Kreis, der kurz der Richtkreis genannt werden soll, hat den Durchmesser $a - b$. Siehe Abb. 1.

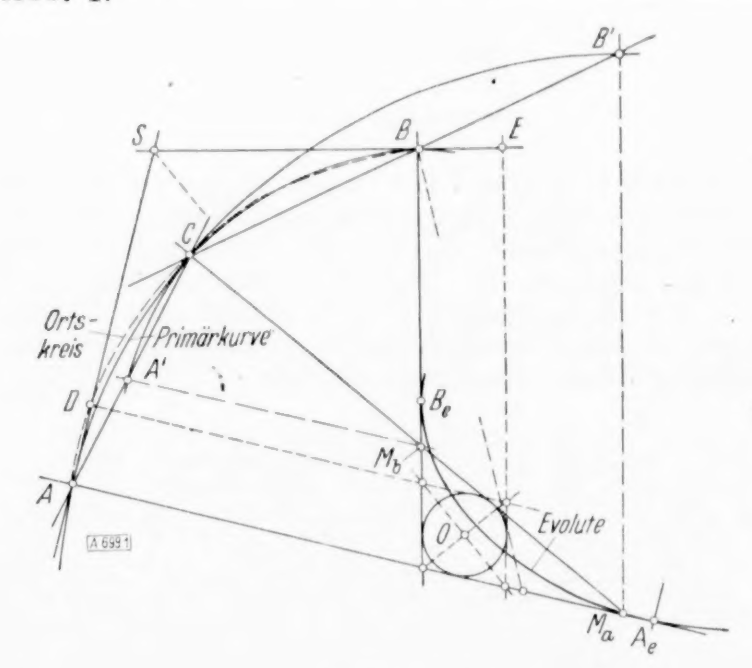


Abb. 1.

Sind ϱ_a bzw. ϱ_b die Krümmungshalbmesser in A bzw. B einer Primärkurve, die durch einen Korbbogen ersetzt werden soll, ferner A_e bzw. B_e die Krümmungsmittelpunkte der Primärkurve, so läßt sich nachweisen, daß das Mittelpunktspolygonstück $\overline{A_e M_a} + \overline{M_a M_b} + \overline{M_b B_e}$ gleich der gestreckten Länge b des Evolutenbogens $\widehat{A_e B_e}$ ist. Denn es ist $b = \varrho_a - \varrho_b$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \overline{A_e M_a} &= \varrho_a - R \\ \overline{M_a M_b} &= R - r \\ \overline{M_b B_e} &= r - \varrho_b \\ \hline \overline{A_e M_a} + \overline{M_a M_b} + \overline{M_b B_e} &= \varrho_a - \varrho_b = b. \end{aligned}$$

Es ist also auch die gestreckte Länge des Mittelpunktspolygons eines Ersatzkorbbogens für eine Primärkurve mit in sich geschlossener Evolute gleichsinniger Krümmung gleich der gestreckten Länge dieser Evolute.

Da durch Ortskreis und Richtkreis sowohl die Gesetzmäßigkeit der Lage des Übergangspunktes C als auch die der Richtung der Übergangsnormalen festgelegt ist, kann für den Korbbogen die Erfüllung einer weiteren Bedingung vorgeschrieben werden.

Um für den Praktiker eine Anleitung aufzustellen und beiden Forderungen bezüglich Winkeltreue und Flächengleichheit in einem für die praktische Anwendung ausreichenden Maße zu genügen, definieren wir als besten Ersatzkorbbogen denjenigen, bei dem der Übergangspunkt C in den Schnittpunkt der Primärkurven mit dem Ortskreis fällt. Diese Festlegung hat noch für sich, daß außer den Berührungspunkten A und B ein weiterer bestimmter Punkt C auf der Primärkurve liegt.

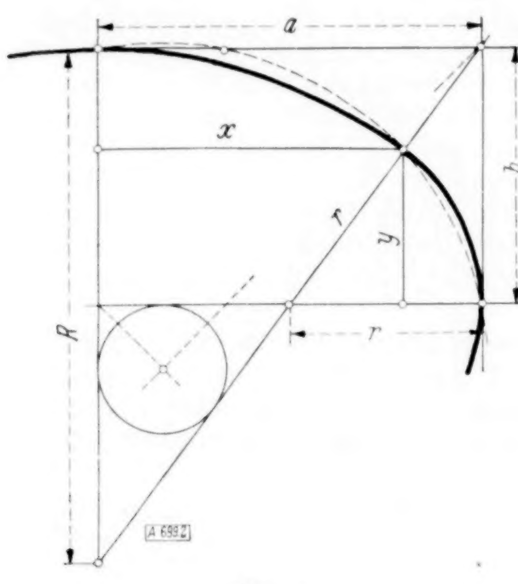


Abb. 2.

In Abb. 2 ist die Viertelsellipse durch einen Korbbogen aus 2 Mittelpunkten ersetzt. Geht die Übergangsnormale durch den Schnittpunkt der Haupttangenten, so liegt der Übergangspunkt C mit den Koordinaten x und y auf der Ellipse, denn es kann aus ähnlichen Dreiecken der Abbildung direkt abgelesen werden

$$\frac{x}{a} = \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}} = \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

woraus durch Quadrieren und Addieren die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ folgt.}$$

Chemnitz. G. D. Sandel. 699

Satz über perspektivisch konjugierte Krümmungsradien. Die Zuordnung zweier perspektivischer Tafeln $x\,y$ und $x'\,y'$ ist vollständig bestimmt, wenn durch F, F' die Hauptfluchtpunkte und durch die sich selbst entsprechenden Punkte H, H' die gemeinsame Spur beider Tafeln gegeben ist, die auf der Verbindungslinie $F\,F'$ senkrecht steht und die Kollineationsachse bildet. Bei der idealen optischen Abbildung im „Gaussschen" Raume ist $F\,F'$ die optische Achse, $F\,H = f$ die dingseitige, $H\,F' = f'$ die bildseitige Brennweite; in $H\,H'$ sind die Hauptpunkte zusammengelegt, und die in $H\,H'$ auf $F\,F'$ senkrechte Gerade charakterisiert die zusammengelegten Hauptebenen.

Für entsprechende Punkte P, P' kann man dann aus Abb. 1 die bekannten Beziehungen ablesen (ähnliche Dreiecke)

$$\frac{f}{-x} = \frac{-y'}{y-y'}, \qquad \frac{f'}{x'} = \frac{y}{y-y'}$$

und erhält durch Addition

$$\frac{f'}{x'} - \frac{f}{x} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und durch Division

$$\frac{f\cdot x'}{f'\cdot x} = \frac{y'}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{f\,y}{x} = \frac{f'\,y'}{x'} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Eine von P unter dem Winkel ω gegen die Verbindungslinie $F\,F'$ geneigte Gerade schneidet die gemeinsame Spur in der Höhe h, von wo aus die entsprechende Gerade unter der Neigung ω' nach P' verläuft. Dann ist

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{h-y}{x}; \qquad \operatorname{tg}\omega' = \frac{h-y'}{x'},$$

also

$$f' \operatorname{tg}\omega' - f \operatorname{tg}\omega = \left(\frac{f'}{x'} - \frac{f}{x}\right)\cdot h - \frac{f'\,y'}{x'} + \frac{f\,y}{x}$$

oder nach (1) und (2)

$$f' \operatorname{tg}\omega' - f \operatorname{tg}\omega = h \quad . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Für die geradlinige Verbindung $P\,P'$ mit der Neigung $\omega_0 = \omega_0'$, welche die Spur in der Höhe h_0 und $F\,F'$ in den zusammenliegenden Punkten $K\,K'$ trifft, wird aus ähnlichen Dreiecken

$$F\,K = f' \quad \text{und} \quad K'\,F' = f.$$

Dieses Kollineationszentrum $K\,K'$ entspricht den zusammengelegten Gaußschen Knotenpunkten.

Die vorliegende Arbeit sucht eine Beziehung zwischen den Krümmungsradien in entsprechenden Punkten entsprechender Kurven, wobei also die zweiten Differentialquotienten der Neigung ω auftreten müssen. Man erhält aus (3) durch zweimalige Differentiation, wobei das Inkrement $d\,h$ beiden Tafeln gemeinsam ist,

$$\frac{f'}{\cos^2\omega'}\cdot\frac{d\,\omega'}{d\,h} - \frac{f}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\,\omega}{d\,h} = 1 \quad . \; . \quad (3a)$$

und

$$\frac{2\,f'\sin\omega'}{\cos^3\omega'}\left(\frac{d\,\omega'}{d\,h}\right)^2 + \frac{f'}{\cos^2\omega'}\cdot\frac{d^2\,\omega'}{d\,h^2} = \frac{2\,f\sin\omega}{\cos^3\omega}\left(\frac{d\,\omega}{d\,h}\right)^2 + \frac{f}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d^2\,\omega}{d\,h^2}$$

oder

$$\frac{2\,f\sin\omega}{\cos^3\omega}\cdot\left(\frac{d\,\omega}{d\,h}\right)^2 + \frac{f}{\cos^2\omega}\,\frac{d^2\,\omega}{d\,h^2} = \text{inv.} \quad . \quad (4);$$

denn man erhält eine Invariante der Abbildung, da auf beiden Seiten der Gleichung die nämlichen Ausdrücke, nur durch gestrichene Buchstaben unterschieden, auftreten.

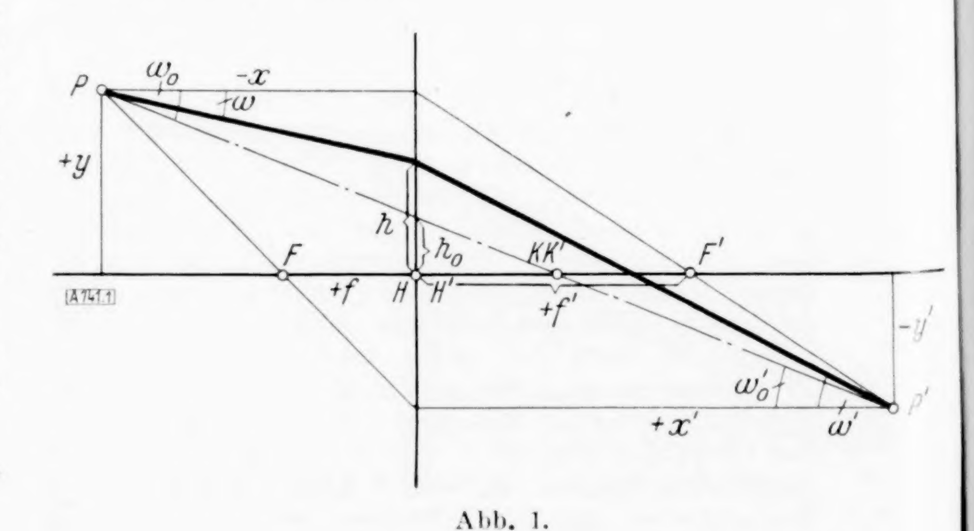


Abb. 1.

Führt man die durch die Abb. 2 gekennzeichneten Größen ein, so folgt, wenn ϱ der Krümmungsradius in einem Kurvenpunkt P und ξ, η die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts M sind, aus

$$t^2 = \xi^2 + (h - \eta)^2 - \varrho^2,$$

$$t \cdot \frac{dt}{dh} = h - \eta = t \sin\omega + \varrho \cos\omega$$

und

$$\frac{dt}{dh} = \frac{t \sin\omega + \varrho\cos\omega}{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5);$$

ferner ist

$$t \cdot d\omega = d h \cdot \cos\omega,$$

also

$$\frac{d\omega}{dh} = \frac{\cos\omega}{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

und

$$\frac{d^2\omega}{dh^2} = -\frac{\sin\omega}{t} \cdot \frac{d\omega}{dh} - \frac{\cos\omega}{t^2} \cdot \frac{dt}{dh}$$

oder nach Einsetzen von (5) und (6)

$$\frac{d^2\omega}{dh^2} = -\frac{\sin\omega}{t} \cdot \frac{\cos\omega}{t} - \frac{\cos\omega}{t^2} \cdot \frac{t \sin\omega + \varrho\cos\omega}{t}$$

$$= -\frac{\cos\omega}{t^2}\left(\sin\omega + \sin\omega + \frac{\varrho}{t}\cos\omega\right),$$

also

$$\frac{d^2\omega}{dh^2} = -\frac{\cos\omega}{t^3}\,(2\,t \sin\omega + \varrho\cos\omega) \quad . \; . \; . \; (7).$$

Abb. 2.

Durch Einsetzen von (6) und (7) in die Invariante (4) erhält man aber

$$\frac{2 f \sin\omega}{\cos^3\omega} \cdot \frac{\cos^2\omega}{t^2} - \frac{f}{\cos^2\omega} \cdot \frac{\cos\omega}{t^3}\,(2\,t\sin\omega + \varrho\cos\omega) = \text{inv.}$$

oder

$$\frac{2 f \sin\omega}{t^2 \cos\omega} - \frac{2 f \sin\omega}{t^2\cos\omega} - \frac{f\varrho}{t^3} = \text{inv.},$$

also

$$\frac{f\varrho}{t^3} = \frac{f'\varrho'}{t'^3} = \text{inv.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Diese Beziehung ist durch ihre Einfachheit merkwürdig, weil im allgemeinen Maßbeziehungen bei lagengeometrischen Zuordnungen keine einfache Formulierung gestatten.

Entspricht ein Kegelschnitt der einen Tafel einem Kreis mit bekanntem Radius der andern Tafel, so folgt aus Gl. (8) für den Krümmungsradius in einem Punkt des Kegelschnitts eine einfache geometrische Konstruktion.

Beispiel: Mittels Gl. (8) kommt man auch auf die bekannte Formel für den Krümmungsradius eines Kegelschnitts, wenn man dem Kegelschnitt einen kollinearen Kreis zuordnet. Als Beispiel sei die Ellipse gewählt; da diese stets durch den ebenen Schnitt eines Kreiszylinders erzeugt werden kann, genügt an Stelle der Kollineation die Affinität, wobei $f = f' = \infty$, jedoch $\frac{f'}{f} = \text{const}$ zu setzen ist.

Für die in Abb. 3 eingezeichneten Größen ist

$$\frac{c'}{c} = \frac{X'}{X} = \frac{b}{a} = \frac{t'\cos\omega'}{t\cos\omega} = \frac{f'}{f},$$

$$Y' = Y; \quad \varrho' = b,$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega' &= \frac{X'}{b} = \frac{X}{a} \\ \cos\omega' &= \frac{Y'}{b} = \frac{Y}{b} \end{aligned}\right\} b^2 X^2 + a^2 Y^2 = a^2 b^2,$$

$$t \sin\omega = t' \sin\omega',$$

$$t\cos\omega = \frac{a}{b} \cdot t'\cos\omega',$$

also

$$t^2 = \frac{t'^2}{b^2}\,(b^2 \sin^2\omega' + a^2\cos^2\omega')$$

$$= \frac{t'^2}{b^2}\left(\frac{b^2 X^2}{a^2} + \frac{a^2 Y^2}{b^2}\right)$$

und

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}{a\,b^2};$$

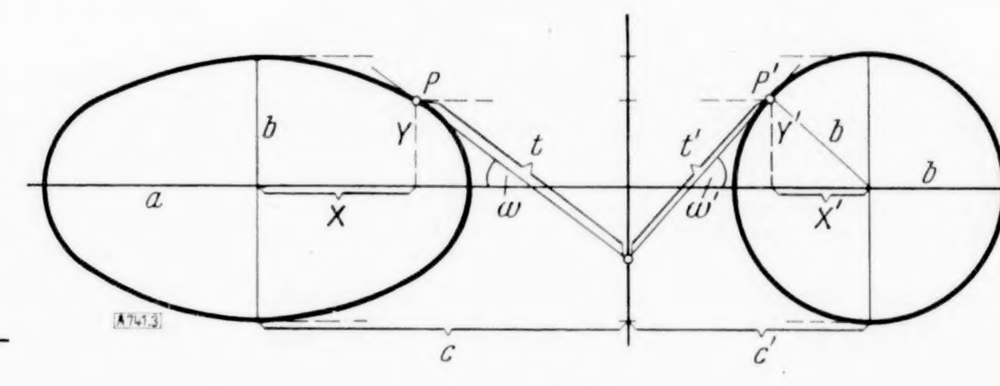


Abb. 3.

man erhält somit aus (8)

$$\varrho = \frac{f'}{f}\left(\frac{t}{t'}\right)^3 \cdot \varrho' = \frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}^{\,3}}{a^3 b^6} \cdot b$$

$$= \frac{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}^{\,3}}{a^4 b^4}.$$

Die angegebene Entwicklungsmethode läßt sich fortsetzen:

In Abb. 4 sind $P\,P_1$ Punkte einer Kurve C; $M\,M_1$ sind die zugehörigen Punkte ihrer Evolute E, und $\mathfrak{M}$ der Krümmungsmittelpunkt dieser Evolute an der betrachteten Stelle. Auf der Kollineationsachse sind wieder die Schnitthöhen h der Kurventangenten t angetragen. Über die Vorzeichen der ersten und zweiten Krümmungsradien ϱ bzw. w ist in der durch Abb. 4 gekennzeichneten Weise verfügt. Man hat dann die neue Beziehung

$$d\varrho = w\,d\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

und erhält durch nochmalige Differentiation von Gl. (7)

$$t^4 \frac{d^3\omega}{d h^3} = [4\,t \sin\cos + 3\,\varrho \cos^2]\frac{d t}{d h}$$
$$+ [2t^2(\sin^2 - \cos^2) + 2t\varrho\sin\cos - t\,w\cos^2]\frac{d\omega}{d h}$$

und unter Berücksichtigung von (5) und (6)

$$\left.\begin{aligned}\frac{t^5}{\cos}\frac{d^3\omega}{d h^3} &= 2\,t^2\,(3\sin^2 - \cos^2)\\ &\quad + 9\,t\,\varrho\sin\cos + 3\,\varrho^2\cos^2 - t\,w\cos^2\end{aligned}\right\} \quad (10).$$

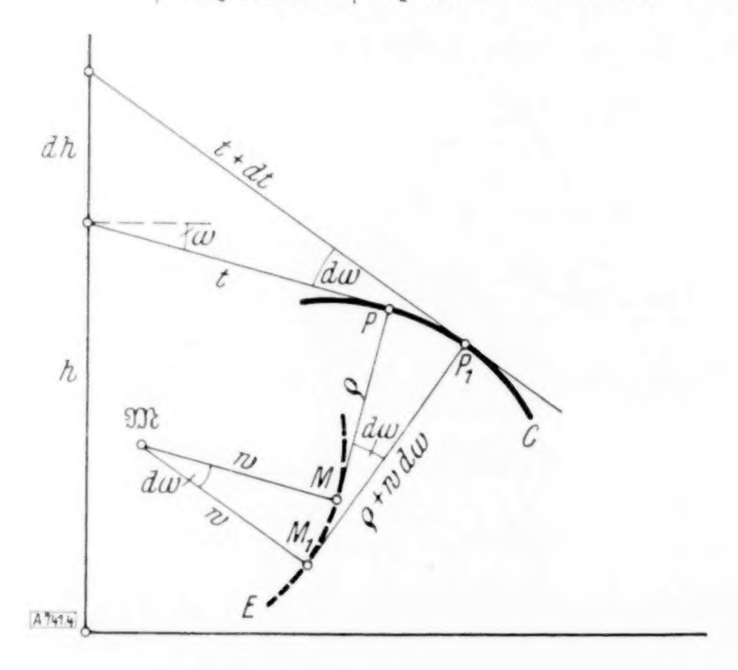


Abb. 4.

Andernteils ergibt sich aus der Invariante (4) durch nochmalige Differentiation

$$\left.\begin{aligned}2f\frac{\cos^2+3\sin^2}{\cos^4}\left(\frac{d\omega}{d h}\right)^3 + 6f\frac{\sin}{\cos^3}\cdot\frac{d\omega}{d h}\cdot\frac{d^2\omega}{d h^2}\\ + \frac{f}{\cos^2}\frac{d^3\omega}{d h^3} = \text{inv.}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (11).$$

Setzt man hierin die Werte der Differentialquotienten aus (6), (7) und (10) ein, so erhält man als neue Invariante

$$\frac{f}{t^5}\,[3\,\varrho\,(t\sin\omega + \varrho\cos\omega) - t\,w\cos\omega] = \text{inv.} \qquad (12).$$

Auch das durch diese Invariante zum Ausdruck gebrachte Gesetz ist — in Anbetracht des für eine lagengeometrische Zuordnung immerhin komplizierten Zusammenhangs — von einer auffallenden Einfachheit.

Ist also (neben den die Kollineation bestimmenden Größen f und f') in der einen Tafel die Neigung ω der Tangente im Kurvenpunkt P, ihre Länge t bis zur Kollineationsachse und ihre Schnitthöhe h mit derselben gegeben, so erhält man die entsprechende Neigung ω' in der anderen Tafel aus (3); die entsprechende Tangentenlänge t' ergibt sich, wenn man Gl. (6) in Gl. (3a) einsetzt, aus

$$\frac{f'}{t'\cos\omega'} - \frac{f}{t\cos\omega} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{b}).$$

Sind noch die Krümmungsradien ϱ und w in der ersten Tafel bekannt, so findet man ϱ' und w' aus den Gl. (8) und (12); dabei sind ϱ' und w' die vom Punkte P' der zweiten Tafel aus in der Normalen und Tangente der Kurve C' gemessenen rechtwinkligen Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $\mathfrak{M}'$ der Evolute E'. Da alle Beziehungen rational sind, können sie auch mit Lineal und Zirkel konstruiert werden.

Fährt man in der angegebenen Weise fort, so erhält man für die Evoluten von Evoluten . . . . stets wieder rationale, also konstruierbare Funktionen, falls die betreffenden Elemente in der ersten Tafel gegeben sind.

Für das mit Abb. 3 angegebene Beispiel erhält man aus (12) wegen $w' = 0$ und unter Berücksichtigung der bei diesem Beispiel angegebenen speziellen Beziehungen $\left(\text{wobei } \frac{\cos\omega'}{\cos\omega} = \frac{b\,t}{a\,t'} = \frac{\sqrt{\;}}{a^2\,b}\right)$

$$w = 3\,\varrho\,\text{tg}\,\omega + \frac{3\varrho^2}{t} - \frac{f'}{f}\left(\frac{t}{t'}\right)^5\cdot 3\,\varrho'\left(\frac{t'\sin\omega'}{t\cos\omega} + \frac{\varrho'\cos\omega'}{t\cos\omega}\right),$$

woraus sich nach einigen Umformungen

$$w = -\frac{3\,(a^2-b^2)\,X\,Y}{a^2\,b^2}\cdot\varrho$$
$$= -\frac{3\,(a^2-b^2)\,X\,Y}{a^6\,b^6}\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}^{\,3}$$

ergibt. Das ist aber die Gleichung des Krümmungsradius der Ellipsen-Evolute, ausgedrückt in den Koordinaten des zugehörigen Ellipsen-Punktes; aus dem vorletzten Ausdruck ersieht man, daß bei dem für die Krümmungsradien ϱ und w eingeführten Richtungssinn das Vorzeichen von $\varrho\cdot w$ dem Vorzeichen von $X\cdot Y$ stets entgegengesetzt ist.

München. F. Staeble. 741

BUCHBESPRECHUNGEN

A. L. **BOWLEY,** Prof. a. d. Universität London, Grundzüge der mathematischen Ökonomik. Ins Deutsche übertragen von H. BERNARDELLI. (Beiträge zur quantitativen Wirtschaftsforschung herausgegeben von Eugen Altschul, Band I.) 128 S. m. 19 graph. Darstellungen. Leipzig 1934, Verlag Hans Buske. Preis geh. 8 M.

Bowleys 1924 erschienenes „Mathematical Groundwork of Economics" gilt als Standwerk der durch die Namen Cournot, Walras, Jevons, Pareto, Marshall, J. Fisher gekennzeichneten, auf statische Probleme sich beschränkenden „mathematischen Nationalökonomie". Es handelt sich hier nicht einfach um ein Gebiet der „angewandten Mathematik", auf dem jeder Mathematiker mit guter Allgemeinbildung seine Künste versuchen kann, sondern um einen Ausschnitt aus der Wirtschaftstheorie: eine gewisse Gruppe von Grundproblemen der statischen Wirtschaft, bei denen eine mathematische Formulierung der beherrschenden quantitativen Beziehungen — trotz aller Handlungsfreiheit der beteiligten Individuen — und die Ableitung von Folgerungen aussichtsreich erscheint. Sicherlich berührt die Mathematik nur eine Seite der umfangreichen wirtschaftswissenschaftlichen Problematik — für die ja Volks- und Staatswissenschaften sicherlich die primäre Bedeutung haben. Aber andererseits muß dem weitverbreiteten Irrtum entgegengetreten werden, der Geltungsbereich der mathematischen Untersuchung beschränke sich auf den Fall der kapitalistischen Marktwirtschaft, wo nur private ökonomische Motive eine Rolle spielen. Nur müssen im Fall der staatlich gesteuerten Wirtschaft, z. B. der Einführung von Festpreisen, die eben diesem Fall entsprechenden Rand-

bedingungen zugrunde gelegt werden. (Vgl. das Beispiel von Bowley S. 114 f.)

Das Buch behandelt in sieben Kapiteln den einfachen Tausch von zwei Waren und den Tausch von beliebig vielen Waren zwischen beliebig vielen Personen, die Theorie der Produktion einschl. Angebot und Nachfrage von Produktionsfaktoren, die allgemeinen Gleichungen des Angebots und der Nachfrage in einer Wirtschaft mit stationärer Bevölkerung nebst Anwendungen, Übergewinn, Differentialrente und Einfluß der Besteuerung. Durch seinen folgerichtigen, geschlossenen Aufbau vermittelt das Werk einen guten Einblick in den Stand der Theorie von 1924. Ausführliche Besprechungen, insbesondere vom wirtschaftstheoretischen Standpunkt, haben K. Wicksell[1]) und H. V. Stackelberg[2]) gegeben, letzterer auch unter Beziehung auf die Bernardellische Übersetzung. Bezüglich zahlreicher in die deutsche Ausgabe übernommener Ungenauigkeiten des Originals und einer bedauerlich großen Zahl von neuen Fehlern der Übersetzung muß auf die Liste bei v. Stackelberg verwiesen werden. Zur inhaltlichen Würdigung noch folgende Bemerkungen.

Die Schilderung des wirtschaftlichen Sachverhalts und der Übergang zum mathematischen Apparat fällt oft reichlich knapp aus, und dem Leser verbleibt dann die Aufgabe, sich zu überlegen, wieso der eine dem andern adäquat ist. Beispielsweise braucht man S. 83 f. noch mn Relationen, um aus den allgemeinen Gleichungen des Angebots der Güter X_r die mn Einzelangebotspreise (Stückkosten) ${}_tp'_r$ zu eliminieren und so die Gesamtangebotsfunktionen $p'_r = \varphi_r(x_r)$ abzuleiten. Zu diesem Zweck werden die kommerziellen Gleichungen formuliert, die besagen, daß die von den einzelnen Produzenten durch Betriebsüberlegenheit zu erzielenden Übergewinne $(p'_r - {}_tp'_r)\ {}_tx'_r$ ein Maximum werden sollen. Der Leser würde es vielleicht naturgemäßer finden, die p'_r durch irgendein Verfahren der Durchschnittsbildung aus den ${}_tp'_r$ sich zu verschaffen: es bleibt ihm überlassen, sich klar zu machen, daß das tatsächlich angewendete Verfahren den allgemeinen im ersten Kapitel entwickelten ökonomischen Prinzipien entspricht. In diesem Sinne werden dann nämlich Gesamtangebotspreise p'_r und Gesamtnachfragepreise p_r im Falle des Gleichgewichts einander gleichgesetzt. Übrigens fehlt m. E. bei der Diskussion der $\varphi(x_r)$ und der Gesamtnachfragefunktionen $p_r = f(x_r)$ eine Auseinandersetzung über die Rolle des „Reservegutes“ Geld, die es erlaubt, sich vorzustellen, die Mengen aller von X_r verschiedenen Güter seien konstant, während x_r selbst sich ändert.

In der Theorie der Produktion, wo die Angebotskurve $p' = \varphi(x)$ des Einzelerzeugers identisch mit der Kurve der Stückkosten $\frac{u}{x}$ ist, bringt Bowley (S. 61 f.) ohne (die immerhin erwünschte) Beweisangabe den Satz, daß die Stückkosten fallen oder steigen, je nachdem das Verhältnis Stückkosten $\frac{u}{x}$: Grenzkosten $\frac{du}{dx}$ größer oder kleiner als 1 ist, und schließt daran die auch bei deutschen Autoren nicht auszurottende Fehlaussage, im ersten Fall sei die Gesamtkostenkurve konkav, im zweiten Fall konvex nach unten gekrümmt. In Wirklichkeit kann die Krümmung in beiden Fällen wechseln, nur muß die Wendetangente die Kostenachse im ersten Fall oberhalb, im zweiten Fall unterhalb des O-Punktes schneiden. Die Gesamtkostenkurve geht i. a. nicht (wie in Bowleys Abbildungen) durch den O-Punkt (fixe Kosten!); damit entfällt der vom Verf. (S. 63) angegebene Satz, $p' = \frac{u}{x}$ sei ein Durchschnittswert der Grenzkosten aus dem Bereich zwischen O und x. Verf. überläßt es wieder dem Leser, die beiden Tatsachen auf einen Nenner zu bringen, daß für den Einzelerzeuger bei Übereinstimmung seiner Grenzkosten mit dem Nachfragepreis Gleichgewicht besteht, während für die Gesamtwirtschaft das Kriterium $p'_r = p_r$ gilt. (Für den Einzelerzeuger liegen die Dinge anders als beim allgemeinen Tausch!) Der für den Fall des Käufermonopols (S. 105 f.) formulierte Satz trifft m. E. in seinem zweiten Teil nicht zu.

Die Gefahr, daß die mathematische Nationalökonomie im Formalismus stecken bleibt und ein Problem als erledigt ansieht, wenn man glaubt, die für die Bestimmung der Unbekannten nötige Zahl von Gleichungen zusammen zu haben, wird durch das Bowleysche Beispiel S. 95 f. illustriert, das durch v. Stackelberg als fehlerhaft dargetan ist, insofern die aus dem Extremalkriterium gewonnenen Bestimmungsgleichungen nicht zu einem Maximum, sondern zu einem Minimum des Nutzens führen. Zu diesem Punkt erscheinen grundsätzliche Auseinandersetzungen notwendig; auch über die Frage, wie diejenigen Größtwerte, die nicht einer „Maximumsstelle“, sondern einer Randstelle des empirisch begrenzten Bereichs entsprechen, berücksichtigt werden. — Alles in allem hat man mit dem Bowleyschen Werk eine wertvolle Grundlage zur Vertiefung der Zusammenarbeit der Wirtschaftstheoretiker mit berufenen Mathematikern, wie sie besonders auch für die Probleme der gesteuerten Wirtschaft nutzbar zu machen wäre.

Nachstehend sei noch eine Ergänzung der v. Stackelbergschen Ausstellungen zur deutschen Übersetzung gegeben (wobei von zahlreichen leicht festzustellenden Flüchtigkeiten abgesehen wird).

S. 35, Zeile 13: Der Nebensatz muß lauten: „ je kleiner der Anteil von Y wird, d. h. je mehr sich y bei festbleibendem x vermehrt“.
S. 87, Zeile 8: Statt $-2fy$ muß $+fy$ stehen.
S. 86, Zeile 17: Statt „Einkommen“ muß es „Ausgaben + Ersparnisse“ heißen.
S. 97: Die Abbildungen 14a und 14c sind vertauscht.
S. 102, Zeile 3: Statt „Verkäufern“ muß es „Käufern“ heißen.
S. 104: Der letzte Abschnitt muß wie folgt beginnen; „Anders formuliert: Der Nutzengewinn des Käufers ist“
S. 105, Zeile 9 von unten: Statt „Daher“ ist zu setzen: „Denn nur dann“.

A. Timpe. 742

Prof. Dr. R. **FUCHS**, Prof. Dr. L. **HOPF**, Dr. FR. **SEEWALD**, Aerodynamik. Zweite völlig neubearbeitete und ergänzte Auflage der „Aerodynamik“ von R. Fuchs und L. Hopf. Bd. I, Mechanik des Flugzeugs von L. Hopf. VIII + 339 S. m. 268 Abb. Berlin 1934, Verl. Julius Springer. Preis geb. 30 M.

Dieser erste Band ist eine Neubearbeitung des 2. Teiles des bekannten Werkes von Fuchs und Hopf (erschienen 1922 im Verlag R. C. Schmidt, Berlin), das lange Zeit in Deutschland das einzige Lehrbuch war, das die strömungstechnischen Fragen des Flugzeuges behandelte. Dem Anwachsen des Stoffes entsprechend war es notwendig, den Stoff auf mehrere Bände zu verteilen, die voneinander unabhängige, sich ergänzende Darstellungen sein sollen. So behandelt der zweite Band die Theorie der Luftkräfte und der dritte, bis jetzt noch nicht erschienene, wird den Luftschrauben gewidmet sein.

Die Einteilung des ersten Bandes: I. Grundlagen, II. Kräftegleichgewicht im geraden Flug, III. Zahlenwerte, IV. Momentengleichgewicht im geraden Flug, V. Gestörte und gesteuerte Längsbewegung,

[1]) Deutsch im Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 58 (1927).
[2]) Archiv f. math. Wirtschafts- u. Sozialforschung 2 (1926), S. 42 ff.

VI. Stationäre Seitenbewegung. VII. Seitenstabilität und Seitensteuerung.

Im ersten Kapitel werden kurz die technischen und aerodynamischen Grundbegriffe des Flugzeuges zusammengestellt, die Versuchstechnik, die zur Beherrschung der Probleme des Flugzeuges entwickelt ist, gestreift und die Aufgaben der Theorie klargelegt.

Die folgenden Kapitel, mit Ausnahme des dritten, sind nunmehr der Bewegung des Flugzeuges gewidmet, sie lehnen sich in der Art der Darstellung stark an die 1. Auflage an, haben aber eine große Bereicherung erfahren durch die Fülle des dargebotenen Zahlenmaterials (Luftkräfte, Momente, Widerstand einzelner Flugzeugteile usw.). Bei der Schwierigkeit der flugmechanischen Probleme besteht immer die Gefahr, daß entsprechend dem Wunsche, möglichst alle Einflüsse zu berücksichtigen, die mathematische Darstellung kompliziert wird und manchem Leser es zum Schluß schwer wird, die technisch wichtigen von den geringeren Einflüssen zu unterscheiden; zumal man die bei allgemeinen Bewegungen (vgl. die letzten Kapitel) auftretenden Differentialgleichungen immer nur numerisch beherrscht. Neben den Arbeiten der neuesten Zeit (vor allem in der englischen Literatur), die unter Verzicht auf die gleichzeitige Erfassung „aller Einflüsse" eine in einzelnen Punkten leichter lesbare Darstellung gefunden haben, wird dieser von Hopf geschriebene Teil über Flugmechanik sich immer behaupten; denn durch die sorgfältige Auswahl des Zahlenmaterials, das man in so bequemer Form schwerlich wiederfindet, wird er eine unentbehrliche Ergänzung dieser anderen Darstellungen sein für den, der sich erst in das Gebiet einarbeitet, und andererseits wird er durch die stärkere Betonung der mathematischen Formulierung nach einer gewissen Einarbeitung das Fortschreiten erleichtern.

Göttingen. I. Lotz. 739

Prof. Dr. R. **FUCHS**, Prof. Dr. L. **HOPF**, Dr. Fr. **SEEWALD**, Aerodynamik. Zweite völlig neubearbeitete und ergänzte Auflage der „Aerodynamik" von R. Fuchs und L. Hopf. Bd. II. Theorie der Luftkräfte von R. Fuchs. VII + 310 S. mit 224 Abb. und einem Anhang. Berlin 1935. Verlag Julius Springer. Preis geb. 30 M.

Die jetzt in zweiter Auflage vorliegende Darstellung der Theorie der Luftkräfte von R. Fuchs unterscheidet sich von anderen Werken über Aerodynamik insofern, als sie bewußt und ausschließlich auf flugtechnische Anwendungen gerichtet ist. Die ersten beiden Kapitel dienen der Einführung in die klassische Hydrodynamik. Man findet dort etwas über die Integralsätze von Gauß, Stokes und Cauchy, andererseits einiges über die Eulerschen Gleichungen, die Bernoullische Gleichung, das Biot-Savartsche Gesetz und was sonst zum unentbehrlichen Rüstzeug für das Verständnis der inkompressiblen Strömungen einer idealen Flüssigkeit gehört. Dem Referenten sind die Abb. 21 und 22 zur Strömung um den Kreiszylinder aufgefallen, die leicht irrige Vorstellungen über Potentialströmungen erwecken könnten. Im dritten und vierten Kapitel kann dann der Verf. schon zu den Tragflügeln von unendlicher Breite übergehen. Die Theorie der dünnen Profile wird dabei in einer von den Originalabhandlungen (Birnbaum, Munk, Glauert) etwas abweichenden Weise entwickelt. Sehr ausgiebig werden druckpunktfeste Profile behandelt. Dabei sind allerdings auch Profile (vgl. etwa Abb. 56, 57) angegeben, die praktisch kaum möglich sind, da sie infolge ihrer nicht windschnittigen Formen sich in der wirklichen, reibungsbehafteten Luft ganz anders verhalten dürften, als wie es nach der Rechnung bei Reibungslosigkeit der Fall sein soll. Die zweidimensionale Strömung um Doppeldecker wird im Anschluß an die bekannte Darstellung von Grammel gegeben.

Im fünften und sechsten Kapitel folgt die Theorie des einzelnen Tragflügels endlicher Breite. Bei der Grundaufgabe, die Auftriebsverteilung für gegebene Tragflügelgestalt zu bestimmen, führt der Verf. außer einem kurzen Hinweis auf das bewährte Verfahren von Frl. I. Lotz eine eigene Methode aus, bei der man außer der Konvergenz auch die Güte der jeweils erreichten Näherung abschätzen kann. Seit der Abfassung des Buches ist allerdings gerade auf diesem Gebiete energisch weitergearbeitet worden. Nach der theoretischen Seite gelang es H. Schmidt (vgl. diese Zeitschrift Bd. 17, S. 101 1937) mittels Trefftzscher Ansätze, die Lösung der Prandtlschen Integrodifferentialgleichung der tragenden Linie auf die dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückzuführen, während von H. Multhopp (ausführliche Darstellung erscheint demnächst in der Luftfahrtforschung) und dem Engländer R. C. J. Howland (Phil. Mag. ser. 7, Vol. XXIII, p. 731, 1937) unabhängig voneinander ein neues praktisches Rechenverfahren ausgebildet wurde. Ohne zu der Frage Stellung zu nehmen, welche Rechenverfahren sich endgültig durchsetzen werden, kann man den Verf. auf jeden Fall des Dankes der Leser für die große Anzahl gerechneter Auftriebsverteilungen versichern, die in übersichtlichen Abbildungen mitgeteilt werden. Es ist begreiflich, daß der Verf. in seinem Buche nicht über den Ansatz der tragenden Linie hinausgeht, da die Rechnungen mit tragenden Flächen endlicher Breite bisher zu mühsam waren und erst im vergangenen Jahr durch eine Arbeit von Prandtl (vgl. diese Zeitschrift Bd. 16, S. 360 1936) ein hoffnungsvoller Zugang zu diesen wichtigen Dingen erschlossen wurde. Nach einigen Ausführungen über Mehrdecker endlicher Flügelbreite wird in den Schlußkapiteln noch über den Reibungswiderstand, also über die laminare und turbulente Grenzschicht in der heute üblichen Weise berichtet. Ausführlich wird auch die Entstehung der Zirkulation besonders im Anschluß an die Arbeiten von H. Wagner behandelt.

Alles in allem wird auch die erneuerte Darstellung der Theorie der Luftkräfte von R. Fuchs ein nützliches Werkzeug in der Hand des Fachmanns sein. Es ist bei dem Verlag Springer beinahe überflüssig zu erwähnen, daß die Ausstattung des Buches ausgezeichnet ist.

Göttingen. W. Tollmien. 740

R. v. **MISES**, Fluglehre, Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. 5. Aufl. neu bearb. v. Dr.-Ing. Kurt HOHENEMSER. VI + 342 S. m. 210 Textabb. Berlin 1936. Verlag Julius Springer. Preis brosch. 13,50 M., geb. 14,70 M.

Das Buch wendet sich an den flugtechnisch-interessierten Laien, den Ingenieur, der nicht gerade Flug-Fachmann ist, und den Flieger, der praktische Erfahrungen nach der theoretischen oder grundsätzlichen Seite hin ergänzen will. Dem Bedürfnis dieses dreifachen Leserkreises wird die Darstellung in glücklicher Weise gerecht. Behandelt werden u. a.: Luftkräfte, Aerodynamik der Tragfläche, Schraube, Motor, Steuerung, Fragen des praktischen Fliegens und des Luftverkehrs. Das Grundsätzliche aller Probleme ist klar herausgestellt, Schaubilder und Zahlentafeln vermitteln einen Einblick in die Größenordnungen. Umgangen sind alle Untersuchungen mehr mathematischen Interesses, bzw. solche, deren Verständnis eine größere mathematisch-physikalische Vorbildung erfordert.

Die Neubearbeitung, die der Verfasser nicht selbst durchführen konnte, betrifft fast alle Abschnitte, ohne daß übrigens die Gesamtanlage des Buches verändert worden wäre. Der Umfang des Buches ist um 60 Seiten (von 400) vermindert; diese Raumersparnis ist z. T. durch Umordnung innerhalb der Abschnitte (Zusammenfassung mehrerer Unterabschnitte in einen), z. T. durch Kürzung, an einzelnen Stellen auch durch Streichung (z. B. Windmühlen-Flugzeug) ermöglicht worden. Neu hinzugekommen sind die Abschnitte über den Diesel-Motor, über Entwurfsunterlagen für Luftschrauben und über das Drehflügel-Flugzeug.

Berlin-Adlershof. Marguerre.

PIERRE DE **HALLER**, Dr. sc. tech., L'influence des limites de la veine fluide sur les caractéristiques aérodynamiques d'une surface portante. (Public. de l'Institut d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale.) 55 S. Zürich 1934, Verlag S. A. Leemann Frères & Co.

Haller geht davon aus, daß weit hinter dem Flügel die Vorgänge im Strahlquerschnitt als ebenes Problem behandelt werden können und berechnet mittels der bekannten Spiegelungsmethode den Einfluß der Strahlgrenzen bei kreisförmigem Strahlquerschnitt und beliebiger Auftriebsverteilung, in Erweiterung des Prandtlschen Ergebnisses für elliptischen Flügel. Mit Hilfe eines Satzes, der die Invarianz des induzierten Widerstands gegenüber konformer Abbildung des durch den Strahlquerschnitt bestimmten einfach zusammenhängenden Bereichs aussagt, wird somit für alle Strahlquerschnittskonturen, die sich konform auf den Kreis abbilden lassen, die Berechnung des Einflusses der Strahlgrenzen auf die Bestimmung dieser konformen Abbildung zurückgeführt. Haller führt die Rechnung für verschiedene Konturen (Ellipse, Rhombus, Rechteck) bis zur Schlußformel durch, allerdings immer unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die Modellspannweite klein gegen die linearen Querschnittsabmessungen des Strahls ist. Der Hauptvorteil der Hallerschen Methode gegenüber früheren (Glauert, Theodorsen, Rosenhead) liegt in der Umgehung der induzierten Geschwindigkeit, von der aus der Zugang zum induzierten Widerstand durch schwierige Integrationen praktisch versperrt ist.

Berlin-Adlershof. Haist. 725

PIERRE DE **HALLER**, Dr. sc. techn., La portance et la traînée induite minimum d'une aile au voisinage du sol. Publications de l'Institut d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale Zurich, No. 5, p. 101—131.

Verfasser behandelt zuerst die ebene Potentialströmung um ein Streckenprofil, das sich in Bodennähe befindet, und leitet unter Verwendung der elliptischen Funktionen Jacobis eine Formel für den Auftrieb her, die im Gegensatz zu der von früheren Bearbeitern durch Verwendung der elliptischen Funktionen von Weierstraß gefundenen Auftriebsformel auch bei kleinem Bodenabstand für die numerische Auswertung geeignet ist. Die Berechnung von c_a ist für beliebigen Bodenabstand im Anstellwinkelbereich $0 \leq \alpha \leq 18^0$ durchgeführt; für das Moment ist nur die Formel angegeben.

Der allgemeinere Fall des Kreisbogenprofils läßt keine geschlossene Auswertung zu, sondern erfordert graphische Integration, die an einem Beispiel durchgeführt wird. Dagegen sind c_a und c_m für den Grenzfall, daß die Hinterkante am Boden aufsteht, angegeben und für drei Beispiele in Abhängigkeit vom Anstellwinkel berechnet.

H. leitet noch für den Tragflügel endlicher Spannweite bei beliebigem Bodenabstand, ausgehend von der Dissertation von Munk, die Zirkulationsverteilung bei Minimalwiderstand her. Er berechnet die Verteilung für drei Fälle, worunter die Grenzfälle unbegrenzt großen Bodenabstands mit elliptischer Verteilung und verschwindenden Abstands mit parabolischer Verteilung enthalten sind.

Berlin-Adlershof. Weinberger. 724

J. P. **DEN HARTOG**, Associate Professor of Applied Mechanics, Cambridge, Mass. Mechanische Schwingungen. Deutsche Bearbeitung von Dr. Gustav MESMER, Aerodynamisches Institut Aachen. XII + 343 S. m. 274 Abb. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 29,60 M.

Das vorliegende Buch behandelt die technische Schwingungslehre aus dem Gesichtskreis des praktischen Ingenieurs heraus. Mechanische Schwingungen werden in elementarer Weise besprochen und Erklärungen für Aufschaukelung und Dämpfung der Schwingungen gegeben. Eine sehr große Anzahl von Übungsbeispielen erleichtert es dem Studierenden, sich mit den angeschnittenen Fragen vertraut zu machen.

Der Umfang und der Inhalt des Buches entspricht etwa den deutschen Büchern von Geiger oder Lehr oder dem englischen Buch von Timoshenko, das ebenfalls ins Deutsche übersetzt worden ist. Ich glaube aber nicht, daß das Buch von Den Hartog in bezug auf Originalität der Darstellung mit einem der drei angegebenen Bücher als gleichwertig anzusehen ist. Den Hartog bringt zwar sehr viel und er versucht auch die Darstellungen sehr anschaulich zu machen, in vielen Richtungen sind aber seine Erklärungen nicht einwandfrei. Wenn Herr Den Hartog z. B. als Hauptgrund für die Aufhängung eines 4-takt Motors in Gummi den anführt, daß das schwankende Drehmoment vom Fahrgestell ferngehalten werden soll, so ist das sicher unzutreffend. Beim 4-zyl. 4-takt Motor sind zweifellos die Massenbeschleunigungskräfte in vertikaler Richtung weit störender für das Fahrgestell als das veränderliche Drehmoment.

Es trifft auch ganz sicher nicht zu, daß der Grund für das Schwingen der Fernleitungskabel bei einem gleichmäßig wehenden Wind in dem Ansetzen von Eis an die Drähte und die dadurch bedingte unsymmetrische Querschnittsform liegt. Das Schwingen der Drahtseile im Wind kann man nur durch die periodische Ablösung von Kármán-Wirbel erklären, die Herr Den Hartog ganz übergeht.

Ich kann ferner den Ausführungen Den Hartogs über Resonanzschwingungsdämpfer nicht zustimmen insofern, als Den Hartog als günstigsten Dämpfer denjenigen Resonanzdämpfer ansieht, der reibungsfrei wirkt und dessen Eigenschwingungszahl gleich der Periode der erregenden Kraft ist.

Endlich ist nicht einzusehen, weshalb Herr Den Hartog statt der tatsächlichen Gestalt der Hystereseschleife bei Werkstoffdämpfung eine Ellipse wiedergibt, die dem Leser nur einen falschen Eindruck vermittelt. Über die Dämpfung des Werkstoffs ist mehr bekannt als der Verfasser angibt. Man weiß insbesondere, daß die Werkstoffdämpfung bei Kurbelwellen einen großen Einfluß auf die Aufschaukelung der Schwingungen haben kann.

Von den grundsätzlichen Abweichungen in der Auffassung abgesehen erkennt der Unterzeichnete aber an, daß das Buch unter Vermeidung von abschweifenden mathematischen Entwicklungen anschaulich geschrieben ist und einen reichen Inhalt hat. Die Übersetzung des Buches von Mesmer ist sehr geschickt durchgeführt worden.

Braunschweig. O. Föppl. 710

Dr. C. **CRANZ,** Geh. Reg.-Rat und o. Prof. a. d. Techn. Hochschule, Berlin, Lehrbuch der Ballistik, Ergänzungen zum Band I. 5. Aufl. (1925), Band II (1926) und Band III, 2. Aufl. (1927), XII + 292 S. m. 87 Abb. und einem Schießtabellen-Anhang m. 2 Diagrammen. Berlin 1936, Verlag Jul. Springer. Preis geb. 36 M.

Der vorliegende Band enthält eine den Ballistikern höchst willkommene Sammlung von Ergänzungen zu dem bekannten klassischen Cranzschen Buche, und zwar zu den neuesten Auflagen der drei Bände dieses Werkes. Die wesentlichsten Fortschritte, die die ballistische Wissenschaft in den letzten zehn Jahren gemacht hat, sind in diesem Ergänzungsbande berücksichtigt worden. Erst in den letzten zehn Jahren konnten ja die zahlreichen Erfahrungen des Weltkrieges, soweit sie überhaupt zugänglich gemacht wurden, der wissenschaftlichen Bearbeitung und Verwertung unterworfen werden. Die in dem Buche mitgeteilten Ergänzungen beziehen sich auf die äußere Ballistik, auf die innere und auf die experimentelle Ballistik. Angefügt ist eine Sammlung von etwa vierzig vermischten ballistischen Aufgaben, die für das Studium und den Unterricht in der Ballistik wertvoll sind und besonders willkommen sein werden.

Die ersten Kapitel (etwa 50 Seiten) sind dem Luftwiderstand gegen das fliegende Geschoß gewidmet. Die hohen Geschwindigkeiten der modernen Geschosse, die ja die Schallgeschwindigkeit oft um ein Vielfaches übertreffen, erschweren bekanntlich die experimentelle Erforschung des Luftwiderstandes und der damit verknüpften Vorgänge gewaltig. Unsere Kenntnisse über den Mechanismus des Widerstandes eines rotierenden fliegenden Langgeschosses sind daher trotz zahlreicher Schießversuche mit zum Teil sehr exakten Meßverfahren doch im Grund noch sehr unzulänglich. Auch haben bisher alle Bemühungen, durch theoretisch-physikalische Überlegungen zu einem „Luftwiderstandgesetze" zu gelangen, zu keinem brauchbaren Erfolg geführt, und man ist daher immer noch genötigt, zu jeder Geschoßart eine besondere Beiwertfunktion $K(v)$ der Geschoßgeschwindigkeit v zu erschießen, und gezwungen, damit die Differentialgleichungen der Schußbahn zu integrieren. Im Kriege wurden nun Beobachtungen gemacht, nach denen es wahrscheinlich ist, daß K nicht von der Geschoßgeschwindigkeit v allein, sondern von ihrem Verhältnis zu der am Geschoßort vorhandenen Schallgeschwindigkeit abhängig ist. Theoretische Überlegungen haben das bestätigt. Hierüber findet man ziemlich ausführliche Mitteilungen und Literaturangaben in dem vorliegenden Bande, außerdem eine Anweisung und ein Beispiel (beides von Herrn von Eberhard), wie man diese neue Erkenntnis zur Flugbahnberechnung nach Stufen unter Benutzung der Fasellaschen Tafeln zu verwenden hat. In Nr. 37 werden weiter sieben verschiedene Lösungsmethoden des außerballistischen Hauptproblems mitgeteilt, darunter für einige Bahnen, von denen Flugbahnelemente wirklich erschossen und photogrammetrisch aufgenommen waren. Die Untersuchung solcher vermessener Bahnen ist allein imstande, die Genauigkeit eines Verfahrens der Flugbahnberechnung durch das experimentum crucis zu prüfen, nämlich inwieweit die Rechnung mit der Beobachtung übereinstimmt.

Zur Lösung des innerballistischen Problems teilt Cranz ein Verfahren mit, durch das es auf drei einfache Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt wird, deren Integration er auf zeichnerischem Wege nach dem Verfahren der fortgesetzten Quadraturen vorschlägt, wobei er es für wünschenswert hält, diese Lösungsart durch einige praktische Zahlen zu erproben.

Der dritte Teil des Buches ergänzt den Band III, Experimentelle Ballistik, des Lehrbuches und enthält zunächst Bemerkungen zur Messung von Gasdrucken, insbesondere über piezoelektrische Verfahren, über solche mit elektrischen Widerständen, und solche, die auf magneto-elastischer Druckänderung bei ferromagnetischen Stoffen beruhen. Andere Mitteilungen beziehen sich auf den Kerreffekt-Chronographen von Cranz, Kutterer und Schardin und weitere neuere Apparate, insbesondere zur Funkenkinematographie mit sehr hoher Bildfrequenz (bis zu 3.10^6 Herz).

Alles in allem handelt es sich um ein sehr wertvolles, auch äußerlich musterhaft ausgestattetes Buch, an dem recht zahlreiche Leser und Benutzer ihre Freude haben mögen, ein Wunsch, der allerdings durch den sehr hohen Preis des Buches etwas beeinträchtigt wird. R. Rothe. 702

JAKOB **NIELSEN,** Prof. d. theor. Mech. a. d. Techn. Hochschule Kopenhagen, Vorlesungen über Elementare Mechanik. (Sammlung Die Grundlehren der Mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLIV.) Übersetzt u. bearb. v. Werner Fenchel. X + 500 S. m. 164 Abb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 38 M, geb. 39.60 M.

Das vorliegende Lehrbuch ist die deutsche Bearbeitung seiner in dänischer Sprache vom Verfasser 1933 und 1934 herausgegebenen zweibändigen Vorlesungen über theoretische Mechanik, die er an der technischen Hochschule in Kopenhagen abhält. Der Verfasser, der als Mathematiker eine Zeitlang in Deutschland gewirkt hat, betont in seinem Vorwort, „sein Bestreben, den einfachen mathematischen Gehalt der elementaren Mechanik und damit die Tragweite der eingeführten physikalischen Grundannahmen und der idealisierenden Voraussetzungen deutlich zu machen, sowie Analogien zwischen den verschiedenen Teilen der Mechanik ins Licht zu setzen". Dem Charakter der deutschen Sammlung entsprechen einige neue, vom Bearbeiter und Übersetzer herrührende Kapitel rein mathematischen Inhalts, die für die folgenden Kapitel die Hilfsmittel der Darstellung und Rechnung bilden. So bringt das 1. Kapitel selbstverständlich die Elemente der linearen Algebra mit Vektoren und Matrizen, das 3. die allgemeinen Vektorsysteme, im 7. und 11. eine kinematische Differentialgeometrie der Raum- und Flächenkurven, das 14. das zum Gebrauch des Potentials Nötige, endlich das 18. die Grundzüge der Tensorrechnung.

Die Gliederung der Mechanik vollzieht sich noch nach französischem Vorbild in der Zweiteilung: Statik und Kinematik einerseits, Dynamik (= Kinetik) andrerseits. Der erste umfaßt in 11 Kapiteln alles für Gleichgewicht und Bewegungsgeometrie von Punkt und starrem Körper Wesentliche, die übrigen 10 Kapitel des zweiten Teils handeln von den Grundbegriffen, den freien und gebundenen Massenpunkten unter dem Einfluß besonderer Kraftfelder, der Bewegung starrer Körper bis zur Poinsotbewegung und der des schweren symmetrischen Kreisels. Es folgen noch einige Ausführungen über Gleichgewicht und Bewegung biegsamer Fäden. Jedes Kapitel schließt mit einer Anzahl guter Übungsaufgaben ab, in denen z. T. der Weg der Lösung angegeben ist. Technische Anwendungsgebiete werden da berücksichtigt, wo ein starkes mathematisches Interesse sich betätigen kann. So werden mit Sorgfalt die graphische Statik, insbesondere auch Statik und Kinematik der Fachwerke behandelt. Die Grenzen des elementaren Charakters werden durch Einschluß der Lagrangeschen Gleichungen gekennzeichnet, deren Ableitung jedoch ihren schönen kinematischen Gehalt nicht zum Vorschein bringt. Von den all-

gemeinen Prinzipen kommen natürlich Energiesatz, Schwerpunkts- und Momentensatz zu Worte. Dagegen befremdet, daß nirgends das D'Alembertsche Prinzip steht. Als Ersatz findet man beim gebundenen Massenpunkt die senkrechte Stellung seiner Reaktion gegen die Bahnkurve, beim starren Körper die Äquivalenz des Vektorsystems seiner Massenbeschleunigungen mit dem der Kräfte. Die Verwendung der etwas schwerfälligen Ausdrücke Bewegungsmenge, Moment der Bewegungsmenge u. ähnl. an Stelle des allgemein gebräuchlichen Impulsbegriffes, der nur dem Zeitintegral der Kraft (Kraftantrieb) vorbehalten werden soll, erscheint mir nicht sehr glücklich. Der Kraftbegriff wird durch die Definition: „Bewegt sich ein Massenpunkt der Masse m mit der Beschleunigung b in einem Inertialsystem, so nennt man den Vektor $m\,b$ die auf den Massenpunkt wirkende Kraft" nur unzulänglich erfaßt. Der Verfasser ist außerdem durch seinen Aufbau der Mechanik genötigt, einen statischen und einen „dynamischen" Kraftbegriff zu formulieren und dann in der Dynamik die Beziehung zwischen beiden vermittels eines neuen Gesetzes von der Unabhängigkeit der Kraftwirkungen aufzusuchen und zu sichern. Diese Einwendungen gegen den prinzipiellen Aufbau sollen den großen Wert des Buches nicht beeinträchtigen. Der mathematische Gehalt der elementaren Mechanik ist gut herausgearbeitet. Alte Einzelprobleme, die zum eisernen Bestand der Lehrbücher über das Gebiet gehören, erscheinen durch ihre Beziehung zu allgemeineren Fragestellungen im neuen Lichte. Die Darstellung ist gut lesbar und bietet dem Mechanik-Beflissenen die Möglichkeit, ein hohes Niveau zu erreichen. W i n k e l m a n n. 737

Dr. RUDOLF **ROTHE**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin. H ö h e r e M a t h e m a t i k, Teil III, Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 23.) IV + 238 S. m. 170 Fig. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 6,60 M.

—, Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen, Formelsammlung, unter Mitwirkung von Stud.-Rat OSKAR DEGOSANG, Assistent an der Techn. Hochschule in Berlin. 3. Heft: I n t e g r a l r e c h n u n g (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 35). 49 S. mit 24 Abb. Leipzig und Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 2 M.

Was man an den beiden ersten Bändchen der „Höheren Mathematik" von R. Rothe zu rühmen weiß, gilt auch von dem jetzt vorliegenden dritten Teil: Ein im Verhältnis zum Umfang des Buches fast überreichlicher Inhalt an mathematischer Theorie und ihren vielseitigsten Anwendungen in ausgezeichneter Darstellung. Teil III handelt von Raumkurven und Flächen, Linienintegralen und mehrfachen Integralen, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen — dies alles ist etwa im Umfang der üblichen Vorlesungen über Höhere Mathematik auf rund 230 Seiten außerordentlich lebendig und bei aller Exaktheit anschaulich und verhältnismäßig leichtverständlich gestaltet. Die zahlreichen Beispiele und Übungsaufgaben dürften auch dem der Theorie wenig geneigten Leser die Höhere Mathematik schmackhaft machen, und andererseits manchem „allzu reinen" Mathematiker zeigen, wie der Ingenieur denkt. Wer allerdings bei der Lektüre von Band I und II bisweilen geseufzt hat, weil der Verfasser es ihm nicht allzu bequem macht, der wird sich in diesem dritten Teil gewiß noch mehr anstrengen müssen. Am Ende seiner Bemühungen wird er aber zugeben, daß sich die Arbeit gelohnt hat.

Vom Teil IV der „Höheren Mathematik" (Übungsaufgaben und Formelsammlung) liegt das dritte Heft vor. Es enthält 146 Aufgaben (mit Lösungen) zur Integralrechnung: Formale Integrationen, bestimmte Integrale, angenäherte Quadratur, zeichnerische Integration, Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik, uneigentliche Integrale, Mittelwerte usf. Die Aufgabensammlung dürfte den Lesern als Ergänzung der Lehrbücher sehr willkommen sein.

Freiberg (Sa.). G. G r ü ß. 711

Dr. habil. GÜNTHER **SCHULZ**, Assistent am Inst. f. angew. Math. a. d. Univ. Berlin, F o r m e l s a m m l u n g z u r p r a k t i s c h e n M a t h e m a t i k. (Samml. Göschen, Nr. 1110.) 147 S. m. 10 Abb. Berlin und Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Eine ausgezeichnete Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der praktischen Mathematik, die auch die genäherte Integration partieller Differentialgleichungen mit umfaßt. Für diese wird die Differenzenmethode in der Form, die ihr neuerdings Collatz gegeben hat, gebracht, nicht aber das Ritzsche Verfahren. Das Buch wird eine vortreffliche Hilfe für jeden, der die Methoden der praktischen Analysis anzuwenden hat, vor allem also für den Ingenieur, sein. Für eine hoffentlich bald erforderliche Neuauflage möchte man wünschen, daß der Verfasser dem Paragraphen über harmonische Analyse das Wichtigste über Periodogrammanalyse hinzufügte. Wünschenswert wäre auch ein Abschnitt, der die hauptsächlichsten Formeln der mathematischen Statistik enthielte.

W i l l e r s.

Dr. JOHANNES **FISCHER**, E i n f ü h r u n g i n d i e k l a s s i s c h e E l e k t r o d y n a m i k. VII + 199 S. m. 120 Abb. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,80 M.

Um es vorwegzunehmen: Ein ausgezeichnetes Buch! Durch eine zweckmäßig getroffene Auswahl des großen Gesamtstoffes und durch eine didaktisch sehr geschickt aufgebaute Darstellung gibt der Verfasser eine Einführung in die klassische Elektrodynamik, durch die er dem aufmerksamen Leser weit mehr vermittelt, als nur die ersten Anfänge. Das Buch fußt im wesentlichen auf den grundlegenden Entwicklungen Maxwells. Daß es aber auch dem neueren Ausbau durch Berücksichtigung namentlich der Emdeschen Arbeiten und Gedanken Rechnung trägt, verdient besonders hervorgehoben zu werden. — Der erste Hauptabschnitt — Elektrische und magnetische Felder ohne wechselseitigen Zusammenhang — behandelt das elektrostatische Feld im leeren Raum, das elektrostatische Feld unter Berücksichtigung der Nichtleiter, rechnerische Verfahren der Elektrostatik, das magnetostatische Feld, das elektrische Strömungsfeld in Leitern. Der zweite Abschnitt — Elektrische und magnetische Felder in wechselseitiger Verkettung — gliedert sich in die Verkettungsgesetze, die quasistationären Vorgänge und Ausbreitungsvorgänge, wobei insbesondere die Wellentheorie eingehend erörtert wird. Der dritte Abschnitt — Verschiedenes — enthält neben einer nützlichen Zusammenstellung von Formeln aus der Vektorrechnung und einer Darstellung periodischer Vorgänge ein (auch unabhängig von dem übrigen Stoff des Buches) sehr lesenswertes Kapitel über die Maßsysteme der Elektrizitätslehre.

Stuttgart. W i a r d a. 709

SIR ARTHUR **EDDINGTON,** M. A. D. Sc. LL. D. F. R. S. Plumian Professor of Astronomy and experimental Philosophy in the University of Cambridge. Relativity Theory of Protons and Electrons. VI + 336 S. Cambridge 1936, University Press. Preis 21 sh.

Das Anliegen des Verfassers, dem die Physik und Astronomie manchen kühnen und fruchtbaren Gedanken verdankt, ist es, an der Brücke zwischen zwei gesicherten Bereichen zu bauen, zwischen der Relativitätstheorie einerseits und der Atomistik von Masse und Ladung und der Quantentheorie andererseits. Eine naheliegende Frage, deren Lösung von dieser Vereinigung erhofft wird, ist die Deutung der vier dimensionslosen allgemeinen Naturkonstanten (die die sieben Grundgrößen: Massen der Elementarteilchen Proton und Elektron, Elementarladung, Wirkungsquantum, Lichtgeschwindigkeit, Gravitations- und kosmische Konstante verknüpfen). Abgesehen von den Abschnitten, die mathematische Hilfsmittel bereitstellen oder von den physikalischen Voraussetzungen handeln, sind es Eddingtons eigene Untersuchungen, die dargestellt werden. Mathematiker und Physiker werden in dem Buche Schwierigkeiten finden, die einen, weil ihnen die physikalische Fragestellung vielleicht fremd ist, die anderen, da viel abstrakte Mathematik eingeführt wird und die Verbindung mit der Wirklichkeit der Erfahrung erst nach und nach zu sehen ist. Ob die stark spekulativen Untersuchungen einmal Bestandteile einer wirklichen Theorie der Elementarteilchen werden können, kann erst die weitere Entwicklung zeigen.

Leipzig. F. Hund. 717

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Abstecken und Vermarken von Gleisbogen nach dem Winkelbildverfahren (Nalenz-Höfer-Verfahren) Lehrfach h 501. (Deutsche Reichsbahn, Hilfshefte für das dienstliche Fortbildungswesen.) XII + 187 S. u. 5 Taf. Berlin 1937, Verlag der Verkehrswissenschaftlichen Lehrmittelgesellschaft m. b. H. Preis 2,20 M.

H. **LORENZ** VDI, Bau und Entwicklung des Erdballs. (Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 9. Jahrg. Heft 2.) Seite 33 bis 56. Berlin 1937, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 0,90 M.

Dr. techn. P. **WESSEL,** Das Aufbauprinzip der Technik. 39 S. m. 14 Abb. München 1937, Verlag von Ernst Reinhardt. Preis brosch. 1,50 M.

Dr. phil. KARL **STUMPFF,** a. o. Professor a. d. Un. Berlin, Observator am Meteorolog. Inst. d. Un. Berlin, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. VII + 332 S. m. 41 Abb. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 39 M., geb. 42 M.

Dr. FRIEDRICH **RINGLEB,** Mathematische Methoden der Biologie, insbesondere der Vererbungslehre und der Rassenforschung. VII + 181 S. m. 49 Abb. und einem Geleitwort von Prof. Dr. Hans F. K. Günther. Leipzig und Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 8,80 M.

Dr. FRANZ **BAUR,** Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M., Einführung in die Großwetterforschung. (Mathem.-Phys. Bibl. Reihe I, Nr. 88.) 51 S. m. 12 Abb. Leipzig und Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Dr.-Ing. E. **FRIETSCH,** Wirbelbildung und Kräftewirkung an umlaufenden Kreiselradschaufeln. (VDI-Forschungsheft 384, Ausgabe B, Bd. 8, Mai/Juni 1937.) II + 30 S. m. 32 Abb. und 8 Bildtafeln. Berlin 1937, VDI-Verlag. Preis 5 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Höhere Mathematik, Teil IV, Übungsaufgaben/Formelsammlung, bearb. von Stud.-Rat O. Degosang, 4. Heft (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 36). Seite 51—106 m. 28 Abb. Leipzig und Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis 2,40 M.

HARALD **CRAMÉR,** Prof. a. d. Univ. Stockholm, Random Variables and Probability Distributions (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 36), 120 S. Cambridge 1937, University Press. Preis 6/6 sh.

RUSSEL A. **DODGE,** Associate Prof. of Engineering Mechanics, University Michigan, und MILTON J. **THOMPSON,** Assistant Professor of Aeronautical Engineering, University Michigan, Fluid Mechanics. XI + 495 S. London 1937, McGraw-Hill Publishing Company Ltd. Preis 24/— sh.

Hütte, Taschenbuch der Stoffkunde (Stoffhütte), hrsg. v. Akad. Verein Hütte, E. V. 2. neubearb. Aufl. XIX + 1008 S. m. 222 Abb. Berlin 1937, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis in Leinen 24 M.

Dr. KARL **ULLER,** a. o. Prof. für Physik in Gießen, Die Entdeckung des Wellen-Begriffes. VII + 116 S. m. 3 Abb. Würzburg 1937, Verlag Konrad Triltsch. Preis kart. 5,80 M.

Dr. HELMUT **HASSE,** o. ö. Prof. d. Math. a. d. Universität Göttingen, Höhere Algebra, II. Gleichungen höheren Grades (Sammlung Göschen, Bd. 932). 2. verbess. Aufl. 158 S. m. 5 Fig. Berlin und Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

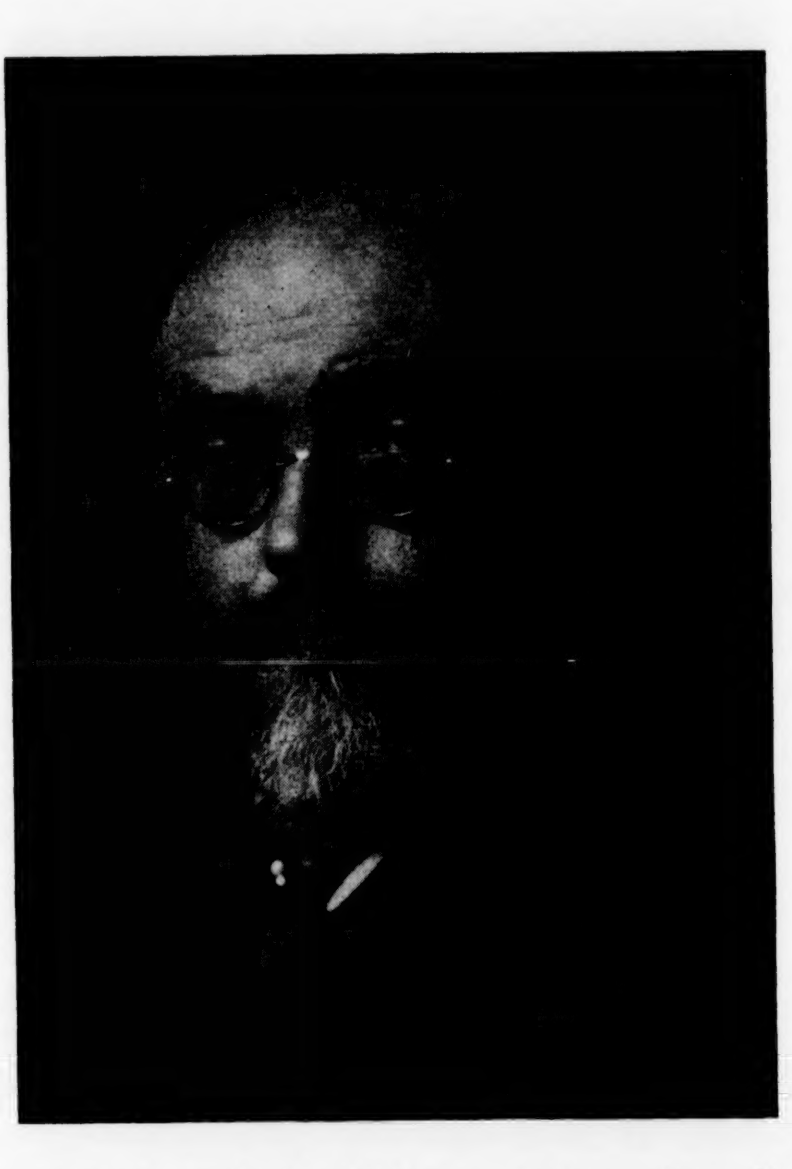
Dr. Ing. KARL **GREIN,** Regierungsbaumeister, Über die Berechnung von Pilzdecken (Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Heft XLV). IV + 48 S. m. 24 Abb. Berlin 1937, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 6,60 M.

Dr. Ing. F. **KRABBE,** Reichsbahnoberrat, München, Grundsätzliche Bemerkungen zur Frage der Beulsicherheit der Stegbleche vollwandiger Blechträger. 12 S. m. 6 Textabb. Berlin 1937, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 1 M.

Dr. Ing. HANS **STRAUB,** Grundschwellen, eine Maßnahme gegen Wasserspiegel- und Sohlensenkungen (Untersuchungen aus dem Flußbaulaboratorium d. Techn. Hochschule Karlsruhe). 51 S. m. 46 Abb. München und Berlin 1937, Verlag von R. Oldenbourg. Preis brosch. 5,20 M.

Relative Bestimmungen der Schwerkraft auf den Landeszentralen, ausgeführt von der Baltischen Geodät. Kommission in den Jahren 1930 u. 1935 (Baltische Geodätische Kommission, Sonderveröffentlichung Nr. 6). 128 S. Helsinki 1937, Verlag Osakeyhtiö Weilin & Göös Aktiebolag.

Prof. Dr. Hamel 60 Jahre.



Am 12. September dieses Jahres vollendete Prof. Dr. Georg Hamel das 60. Lebensjahr. Er wurde in Düren im Rheinland geboren. Seine wissenschaftliche Laufbahn begann er als Assistent von Felix Klein in Göttingen. Hier promovierte er 1901 mit einer Arbeit, die an die Hilbertschen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie anschließt. Von Göttingen ging er nach Karlsruhe, wurde Assistent von Heun und habilitierte sich dort 1903 für Mathematik und Mechanik. Schon 1905 wurde er Ordinarius an der Technischen Hochschule Brünn, übersiedelte von dort 1912 nach Aachen und übernahm, nachdem er 1914 einen Ruf nach Jena und 1918 einen Ruf als Nachfolger A. v. Brills nach Tübingen abgelehnt hatte, 1919 als Nachfolger von Lampe die Professur für Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin, deren Rektor er 1928/29 war.

Ein Blick auf Hamels zahlreiche Arbeiten zeigt die große Vielseitigkeit seiner Interessen. In ihnen offenbart sich sowohl sein auf logische Grundlagenforschung gerichtetes Denken, wie seine tätige Anteilnahme an wichtigen, zeitgemäßen Problemen moderner Technik. Er war der erste, der eine Axiomatik der Mechanik nicht nur versuchte, sondern auch durchführte. Insbesondere diese Arbeiten haben ihm bei allen Mathematikern und Physikern reiche Anerkennung gebracht. Weit verbreitet und viel gebraucht ist sein Lehrbuch der elementaren Mechanik, das 1912 in erster, 1922 in zweiter Auflage erschien. Alle seine Arbeiten im einzelnen hier aufzuzählen, würde zu weit führen. Es mag genügen, hier einige Gebiete zu erwähnen, die ihm wesentliche Förderung verdanken: Mechanik der starren Körper, Mechanik der Drähte und Seile, Hydromechanik, Stabilitätsfragen, Funktionentheorie. Variationsrechnung, Integralgleichungen. Grundlagen der Geometrie. Sein Interesse für die angewandte Mathematik beweist er unter anderem auch durch die Betreuung der entsprechenden Abschnitte des mathematischen Wörterbuches, die er nach dem Tode von Trefftz übernahm.

Große Verdienste erwarb sich Hamel dadurch, daß er als Vorsitzender des mathematischen Reichsverbandes in Wort und Schrift für eine Vertiefung des mathematischen Unterrichtes an Schule und Hochschule und für eine Anpassung an die Forderungen der neuen Zeit eintrat. Immer wieder setzte er sich für eine an allen Hochschulen gleichmäßige Ausbildung wissenschaftlich gut geschulter Lehrer ein, die allen heute an sie gestellten, berechtigten Anforderungen gewachsen sind. Darüber hinaus forderte er die Berücksichtigung der Wünsche von Heer, Technik, Industrie und Wirtschaft im mathematischen Hochschulunterricht, um dadurch das Eindringen mathematischer Methoden in diese Gebiete zu fördern und so dem Mathematiker neue Wirkungskreise zu erschließen.

Die Zeitschrift für angewandte Mathematik hat besonders Anlaß, Prof. Hamels zu gedenken, gehörte er doch von Anfang an zu ihrem engeren Mitarbeiterstab und bei der in diesem Jahre erforderlichen Neuordnung erklärte er sich dankenswerterweise zur Mitarbeit im Redaktionsausschuß bereit.

Möge dem auf der Höhe des Schaffens stehenden Forscher und Lehrer beschieden sein, noch lange, wie bisher, mit reichem Erfolg zu wirken. Willers. 752

NACHRICHTEN

Zu Professor Dr. R. Mehmkes 80. Geburtstag.

Am 28. August beging Professor Dr. Rudolf Mehmke in Stuttgart seinen 80. Geburtstag. In seiner Lehrtätigkeit an der Technischen Hochschule Stuttgart hat Mehmke als Inhaber der Professur für Darstellende Geometrie lange Jahre dieses Fach vertreten, gleichzeitig aber geometrische Methoden der Mechanik und des praktischen Rechnens überhaupt in einer theoretisch wohlfundierten, den Interessen des Ingenieurs angepaßten Form gelehrt. Sein Leitfaden zum graphischen Rechnen gibt eine Auswahl solcher erprobter und als zweckmäßig bewährter Verfahren; insbesondere die logarithmographischen Verfahren werden von praktischen Rechnern, die sich die kleine Mühe der Aneignung dieser Verfahren machten, als ein bequemes Hilfsmittel bei vielen Rechnungen gewertet.

Aus der Fülle seiner Veröffentlichungen, insbesondere auf dem Gebiet der Geometrie, der Mechanik und des praktischen (numerischen und graphischen) Rechnens seien hier sonst noch erwähnt: der Artikel in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften über Numerisches Rechnen, der einen umfassenden Überblick über Tafeln, Apparate und Methoden des numerischen und graphischen Rechnens gibt, Arbeiten über graphische Verfahren der Kinematik und Statik, Verfahren zur Behandlung linearer und nichtlinearer Gleichungen, Potenzreihen und Determinanten.

Als Herausgeber der Zeitschrift für Mathematik und Physik (bis 1915) hat er, zusammen mit C. Runge, in einer Zeit üppigen Wachstums der reinmathematischen Forschung betont die angewandte Mathematik und die Beziehung zu den Grenzgebieten vertreten. Durch verschiedene Beiträge ist Mehmke später Mitarbeiter an der ZAMM geworden, die ja in vieler Hinsicht die wesentlichen Absichten der Zeitschrift für Mathematik und Physik weiterführt und weiter ausgestaltet.

Wir Jüngeren, deren Interesse der angewandten Mathematik gilt, verehren in Mehmke einen der Repräsentanten der älteren Mathematikergeneration, der neben C. Runge und S. Finsterwalder durch Forschung und Lehre zur Förderung der angewandten Mathematik in Deutschland am nachhaltigsten beigetragen hat.

Stuttgart. F. Pfeiffer. 751

Persönliches.

Geh. Hofrat Prof. Dr. S. Finsterwalder-München vollendete sein 75. Lebensjahr.

Ministerialdirektor Prof. Dr. K. Th. Vahlen-Berlin wurde zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften gewählt.

Im 78. Lebensjahr verstarb der frühere ord. Prof. der Mathematik an der Universität Leipzig Geh. Hofrat Dr. O. Hölder.

Dr. phil. habil. C. F. Freiherr v. Weizsäcker-Berlin wurde die Lehrbefugnis für das Fach theoretische Physik in der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig verliehen.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Bad Kreuznach.

Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik hielt ihre diesjährige Tagung am 17. und 18. September in Bad Kreuznach vor dem ebenfalls in Bad Kreuznach in der Zeit vom 19. bis zum 25. September stattfindenden 13. deutschen Physiker- und Mathematikertag ab. Ein großer Teil der anwesenden Mitglieder nahm auch an dieser Tagung teil. Insbesondere interessierten hier außer den mathematischen Vorträgen die Behandlung der physikalischen Regelverfahren der Technik und die zusammenfassenden Berichte über Kernphysik.

Vor dem Beginn der wissenschaftlichen Tagung widmete Prof. Prandtl dem verstorbenen zweiten Vorsitzenden der Gesellschaft Erich Trefftz ehrende Worte des Gedenkens.

Folgende Vorträge wurden gehalten: Am Freitag, dem 17. Februar:

K. Marguerre, Berlin-Johannisthal: Grundsätzliches zur Frage der elastischen Stabilität.

E. Weinel, Jena: Biegung und Stabilität eines doppelt gekrümmten Plattenstreifens.

Th. Pöschl, Karlsruhe: Zur Frage der Stabilität des Eisenbahngleises.

K. Ludwig, Hannover: Der Übergang vom Kreisbogenträger zum geraden Träger.

F. Weinig, Berlin-Adlershof: Rechenblätter zum Integrieren mittels Auszählens.

G. Weinblum, Berlin: Wellenwiderstand auf beschränktem Wasser.

W. Barth, Friedrichshafen: Verfahren zur Bestimmung des Widerstandes eingebauter Flugzeugkühler.

und am Sonnabend, dem 18. September:

W. Schmeidler, Breslau: Schwingenflug mit Wirbelablösung.

A. Klose, Berlin: Erzeugung von Tragflächen.

H. Föttinger, Berlin: Versuche über die Flüssigkeitsreibung umlaufender Scheiben, Zylinder und Zellenkörper.

G. Vogelpohl, Berlin: Beitrag zur Kenntnis des Schmiervorganges unter Nutzbarmachung älterer Arbeiten der hydrodynamischen Theorie.

Vor den Vorträgen fand am Sonnabend, dem 18. September, unter Leitung von Herrn Prandtl die ordentliche Hauptversammlung der Zamm statt. Es wurde der im Laufe des letzten Jahres verstorbenen Mitglieder ehrend gedacht. Herr C. Weber, Dresden, erstattete dann Bericht über Mitgliederzahl, Kassenverhältnisse usw. Auf den Bericht der Kassenprüfer hin wurde dem Vorstand mit Dank für seine Arbeit Entlastung erteilt. Als zweiter Vorsitzender wurde Professor Grammel, Stuttgart, gewählt, der Herrn Prandtl, dem geistigen Führer der Zamm, den herzlichen Dank der Mitglieder der Gesellschaft aussprach. Ferner wurden gewählt: in den wissenschaftlichen Ausschuß für die ausscheidenden Herren Biezeno, Delft und Pöschl, Karlsruhe, die Herren Betz, Göttingen, und Busemann, Braunschweig, zu Kassenprüfern die Herrn Betz, Göttingen, und Flügge, Göttingen. Der ausführliche Jahresbericht wird den Mitgliedern der Gesellschaft mit den Referaten über die Vorträge, soweit diese nicht ausführlich in dieser Zeitschrift erscheinen, in der üblichen Form zugehen.

Vorträge und Hauptversammlung waren trotz des Zwischensemesters der technischen Hochschulen außerordentlich gut besucht. Daß auch der außerwissenschaftliche Teil der Tagung der Gamm, deren Mitglieder sich schon immer als Glieder einer großen Familie gefühlt haben, erfreulich harmonisch verlief, braucht nicht besonders betont zu werden.

Willers. 754

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.